PROBLEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

M. L. KRASNOV, A. I. KISELIOV, G. I. MAKARENKO

TRADUÇÃO:

PEDRO TRINDADE E LIMA

Departamento de Matemática

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO



EDITORA McGRAW-HILL
DE PORTUGAL, LDA.



EDITORA MIR
MOSCOVO

McGraw-Hill 
A Division of The McGraw-Hill Companies

Do original: PROBLEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Estrada de Alfragide, Edifícios Mirante, Bloco A-1, 2720 Alfragide - Portugal
Tel. (01) 4728500 – Fax: (01) 4718981 – E-mail: mcgraw.hillport.@mail.telepac.pt.

Depósito legal: 18537/97
ISBN: 972-9241-67-8
1E1P06041M0
1E2P01080M51T5
Janeiro de 1998

Editor: Hugo Xavier

Composição: Ernestina B. A. Castanheira – Serviços Gráficos

Impressão: SIG – Sociedade Industrial Gráfica

Impresso em Portugal – Printed in Portugal

Prefácio

A terceira edição deste livro foi revista e apresenta alterações significativas em relação às anteriores. Muitos problemas foram substituídos por novos; outros, cuja solução conduzia a expressões demasiado complicadas, foram retirados. Foram acrescentados mais de 50 novos exemplos resolvidos. Foram corrigidas todas as gralhas detectadas, assim como algumas incorrecções nas formulações dos problemas. Os temas que sofreram alterações mais significativas foram os seguintes: 1) resolução de sistemas de equações diferenciais; 2) estudo da estabilidade segundo Liapunov; 3) resolução de equações lineares de ordem n pelo método da sobreposição; 4) integração assimptótica.

Para facilitar a utilização do livro, utilizamos por vezes o símbolo ✦, que assinala o fim da resolução dum exemplo ou duma observação.

Durante a preparação deste livro, contámos com a preciosa ajuda do Prof. Bogatov, do Dr. Schum (Instituto Politécnico de Kalinin) e dos docentes da cátedra de Matemática Superior do MIET, dirigida pelo Prof. Efimov. A todos eles queremos exprimir a nossa profunda gratidão. Queremos também agradecer à Sr.ª D. Zarubina o seu trabalho na elaboração das figuras.

Embora este livro já vá na terceira edição, estamos conscientes de que não está isento de falhas. Por isso aceitaremos com gratidão todas as observações ou sugestões que nos venham a ser feitas com o objectivo de o melhorar.

Os Autores,

Extracto do Prefácio da Segunda Edição

O presente livro contém uma colecção de problemas que abrangem o programa de equações diferenciais para o ensino superior técnico.

Foi dedicada especial atenção aos temas que não estão expostos com suficiente detalhe nos manuais mais conhecidos e que, como mostra a experiência, são mais dificilmente assimilados pelos estudantes. Assim, estão analisados em pormenor o método das isoclinas para as equações de primeira e segunda ordem, a determinação de trajectórias ortogonais e a independência linear de sistemas de funções.

Neste livro foi incluído um número considerável de problemas de equações lineares, com coeficientes constantes e variáveis, problemas de estabilidade segundo Liapunov, utilização do método operacional para a resolução de sistemas e equações diferenciais.

Na segunda edição foram introduzidas novas secções: o método das aproximações sucessivas, soluções singulares das equações diferenciais, equações com um parâmetro pequeno associado à derivada. Foi ampliado o parágrafo dedicado à utilização de séries na resolução de equações diferenciais, foram clarificadas diversas questões e corrigidos os erros e gralhas detectados na primeira edição.

Índice

Capítulo 1

Equações Diferenciais de Primeira Ordem

1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Chama-se equação diferencial a uma equação que estabelece uma relação entre a variável independente x, a função incógnita $y = y(x)$ e as suas derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, i.e., uma equação do tipo

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Se a incógnita for uma função de uma única variável x, a equação diferencial diz-se ordinária (*). Eis alguns exemplos:

1) $\frac{dy}{dx} + xy = 0$, 2) $y'' + y' + x = \cos x$, 3) $(x^2 - y^2)\,dx - (x + y)\,dy = 0$.

Quando a incógnita é função de duas ou mais variáveis, por exemplo, se tivermos $y = y(x, t)$, então uma equação do tipo

$$F\left(x,\ t,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial y}{\partial t}, \cdots, \frac{\partial^m y}{\partial x^k\, \partial t^l}\right) = 0$$

chama-se equação com derivadas parciais. Os índices k e l nesta equação representam números inteiros, tais que $k + l = m$. Seguem-se alguns exemplos:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

chama-se ordem da equação diferencial à maior das ordens das derivadas que nela aparecem. Por exemplo, a equação diferencial $y + x = e^x$ é de primeira ordem, enquanto a equação $y'' + p(x)\,y = 0$, onde $p(x)$ é uma função conhecida, é de segunda ordem; a equação diferencial $y^{(9)} - xy'' = x^2$ é uma equação de nona ordem.

(*) Daqui em diante, trataremos apenas de equações diferenciais ordinárias.

Chama-se solução duma equação diferencial de ordem f no intervalo (a, b) a uma função $y = \varphi(x)$, definida nesse intervalo, juntamente com as suas derivadas, até à ordem n, e tal que, ao fazer a substituição $y = \varphi(x)$ na equação diferencial, esta última fica transformada numa identidade em ordem a x em (a, b). Por exemplo, a função $y = \sin x + \cos x$ é uma solução da equação $y'' + y = 0$ no intervalo $(-\infty, +\infty)$. De facto, se diferenciarmos duas vezes a função dada, teremos

$$y' = \cos x - \sin x,\ y'' = -\sin x - \cos x.$$

Substituindo as expressões de y'' e y na equação diferencial, obteremos a identidade

$$-\sin x - \cos x + \sin x + \cos x \equiv 0.$$

Chama-se curva integral duma equação diferencial ao gráfico duma solução dessa equação.

A forma geral duma equação de primeira ordem é

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Se for possível resolver a equação (1) em ordem a y', teremos

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

ou seja, uma equação de primeira ordem, resolvida em ordem à derivada.

O problema de Cauchy consiste em determinar a solução $y = y(x)$ da equação (1) que satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$, que também se pode representar como $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

O significado geométrico deste problema consiste em determinar a curva integral da equação (1) que passa por um dado ponto $M_0(x_0, y_0)$ do plano $x0y$ (Fig. 1).

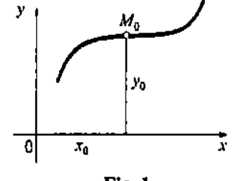


Fig. 1

Teorema sobre a existência e unicidade de solução do problema de Cauchy.

Seja dada a equação $y' = f(x, y)$, onde a função $f(x, y)$ está definida num certo domínio D do plano $x0y$, que contém o ponto (x_0, y_0). Se a função $f(x, y)$ satisfizer as seguintes condições:

a) $f(x, y)$ é uma função contínua das variáveis x e y no domínio D;

b) $f(x, y)$ tem a derivada parcial $\partial f/\partial y$ limitada em D;
Então existe um certo intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$, no qual está definida uma solução $y = \varphi(x)$ da equação dada, que satisfaz a condição $y(x_0) = y_0$.

Este teorema estabelece condições suficientes para a existência de solução única do problema de Cauchy para a equação $y' = f(x, y)$, mas estas condições não são necessárias. Ou seja, pode existir uma única solução da equação $y' = f(x, y)$ que satisfaz a condição $y(x_0) = y_0$, embora no ponto (x_0, y_0) não esteja satisfeita a condição *a*), ou *b*) ou nenhuma delas.

Vejamos alguns exemplos.

EXEMPLO 1. $y' = 1/y^2$. Neste caso, $f(x, y) = 1/y^2$, $\partial f/\partial y = -2/y^3$. Em qualquer ponto $(x_0, 0)$ do eixo $0x$, as condições *a*) e *b*) não estão satisfeitas (a função $f(x, y)$ e a sua derivada $\partial f/\partial y$ são descontínuas no eixo $0x$ e ilimitadas quando $y \to 0$); no entanto, por cada ponto do eixo $0x$ passa uma única curva integral $y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$ (Fig. 2). ✦

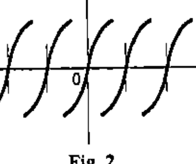


Fig. 2

EXEMPLO 2. $y' = xy + e^{-y}$. O segundo membro da equação: $f(x, y) = xy + e^{-y}$, bem como a sua derivada parcial $\partial f/\partial y = x - e^{-y}$, são contínuos em ordem a x e y em qualquer ponto do plano $x0y$. Em consequência do teorema sobre a existência e unicidade de solução, o domínio no qual a equação tem solução única é todo o plano $x0y$.

EXEMPLO 3. $y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$. O segundo membro da equação $f(x, y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ é definido e contínuo em todos os pontos do plano $x0y$. A derivada parcial $\partial f/\partial y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y}$ tende para infinito quando y tende para 0, isto é, junto do eixo $0x$. Deste modo, nos pontos do eixo $0x$ não é satisfeita a condição *b*) do teorema sobre a existência e unicidade de solução, pelo que a unicidade pode não se verificar no eixo $0x$. Verifica-se facilmente que a função $y = (x + c)^3/8$ é solução da equação dada. Além disso, a equação admite a solução trivial $y \equiv 0$. Por conseguinte, por cada ponto do eixo $0x$ passam, pelo menos, duas linhas integrais, o que significa que, de facto, nos pontos deste eixo a unicidade não se verifica (Fig. 3).

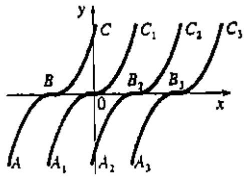


Fig. 3

Entre as curvas integrais da equação considerada encontram-se também linhas compostas por segmentos das parábolas cúbicas $y = (x + c)^3/8$, intercaladas com segmentos do eixo $0x$, por exemplo, as linhas $AB0C_1$, ABB_2C, A_2B_2x, etc., pelo que por cada ponto do eixo $0x$ passa uma infinidade de curvas integrais da equação. ✦

Observação. A condição *b*) do teorema sobre a existência e unicidade de solução do problema de Cauchy **(existência de derivada limitada)** pode ser substituída por outra condição, menos restritiva, **que é a chamada condição de Lipschitz.**

Diz-se que a função $f(x, y)$, definida no domínio D, satisfaz neste domínio a condição de Lipschitz em ordem a y se e só se existir uma constante L (constante de Lipschitz), tal que para quaisquer y_1 e y_2 de D e qualquer x de D se verifica a desigualdade

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < L|y_2 - y_1|.$$

A existência de derivada limitada $\partial f/\partial y$ no domínio D é suficiente para que a função $f(x, y)$ satisfaça em D a condição de Lipschitz (prove esta afirmação). No entanto, a verificação da condição de Lipschitz não implica que a derivada $\partial f/\partial y$ seja limitada. Aliás, esta última pode nem existir. Por exemplo, no caso da equação $y' = 2|y|\cos x$, a função $f(x, y) = 2|y|\cos x$ não é diferenciável em ordem a y no ponto $(x_0, 0)$, com $x_0 \neq \pi/2 + 2k\pi$, $k = 0, 1, \ldots$; no entanto, a condição de Lipschitz é satisfeita numa vizinhança deste ponto:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |2|y_2|\cos x - 2|y_1|\cos x| =$$

$$= 2|\cos x|\,\big||y_2| - |y_1|\big| \leq 2\,|y_2 - y_1|,$$

visto que $|\cos x| \leq 1$ e $\big||y_2| - |y_1|\big| \leq |y_2 - y_1|$. Assim sendo, a condição de Lipschitz é satisfeita com constante $L = 2$.

TEOREMA. Se a função $f(x, y)$ for contínua e satisfizer a condição de Lipschitz em ordem a y no domínio D, então o problema de Cauchy

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0,\ \text{com } (x_0, y_0) \in D,$$

tem solução única.

A condição de Lipschitz é essencial para garantir a unicidade da solução do problema de Cauchy. A título de exemplo, consideremos a equação

$$dy/dx = f(x, y),$$

onde

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Verifica-se facilmente que a função f é contínua. No entanto,

$$f(x, Y) - f(x, y) = \frac{4x^3(x^4 - yY)}{(x^4 + y^2)(x^4 + Y^2)}(Y - y),$$

sendo $y = \alpha x^2$ e $Y = \beta x^2$, teremos

$$|f(x, Y) - f(x, y)| = \frac{4}{|x|}\left|\frac{1 - \alpha\beta}{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)}\right||Y - y|,$$

e a condição de Lipschitz não é satisfeita em nenhum domínio que contenha a origem das coordenadas, visto que o factor que multiplica por $|Y - y|$ é ilimitado quando $x \to 0$.

A equação diferencial considerada admite a solução

$$y = C^2 - \sqrt{x^4 + C^4},$$

onde C é uma constante arbitrária. Daqui resulta que existe uma infinidade de soluções que satisfazem a condição $y(0) = 0$.

Chama-se solução geral da equação (2) a função

$$y = \varphi(x, C), \tag{3}$$

dependente duma constante arbitrária C, e tal que: 1) satisfaz a equação (2) para qualquer valor permitido da constante C; 2) qualquer que seja a condição inicial

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \tag{4}$$

pode escolher-se um valor C_0 para a constante C de tal modo que a solução $y = \varphi(x, C_0)$ satisfaz a condição (4) considerada. O ponto (x_0, y_0) considerado na condição (4) deve pertencer ao domínio D, no qual se verificam as condições de existência e unicidade de solução.

Chama-se solução particular da equação (2) a qualquer solução que se obtém da solução geral (3) quando se atribui um determinado valor à constante arbitrária C.

EXEMPLO 4. Verifique que a função $y = x + C$ é a solução geral da equação diferencial $y' = 1$ e determine uma solução particular que satisfaça a condição inicial $y|_{x=0} = 0$. Dê a interpretação geométrica do resultado.

Resolução. A função $y = x + C$ satisfaz a equação considerada, qualquer que seja o valor de C. De facto, $y' = (x + C)' = 1$.

Consideremos uma condição inicial arbitrária $y|_{x=x_0} = y_0$. Fazendo as substituições $x = x_0$ e $y = y_0$ na igualdade $y = x + C$, obtém-se que $C = y_0 - x_0$. Se substituirmos este valor de C na função dada, teremos $y = x + y_0 - x_0$. Esta função satisfaz a condição inicial dada: fazendo $x = x_0$, obtém-se $y = x_0 + y_0 - x_0 = y_0$. Deste modo, está provado que a função $y = x + C$ é a solução geral da equação considerada. Assim, se tivermos $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, obteremos a solução particular $y = x$.

A solução geral da equação considerada, i.e. a função $y = x + C$, define no plano $x0y$ uma família de rectas paralelas com o declive $k = 1$. Por cada ponto $M_0(x_0, y_0)$ do plano $x0y$ passa uma única linha integral $y = x + y_0 - x_0$. A solução particular $y = x$ corresponde a uma dessas linhas, mais precisamente, à recta que passa pela origem das coordenadas (Fig. 4).

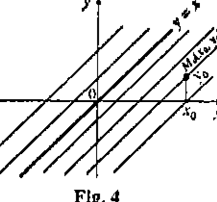


Fig. 4

EXEMPLO 5. Verificar que a função $y = C\,e^x$ é a solução geral da equação $y' - y = 0$ e determinar a solução particular que satisfaz a condição inicial $y|_{x=1} = -1$.

Resolução. De $y = C\,e^x$ resulta que $y' = C\,e^x$. Substituindo na equação dada as expressões de y e y', obtém-se $C\,e^x - C\,e^x = 0$, pelo que a função $y = C\,e^x$ satisfaz a equação diferencial dada, qualquer que seja o valor da constante arbitrária C.

Seja dada uma condição inicial arbitrária $y|_{x=x_0} = y_0$. Substituindo x e y por x_0 e y_0, respectivamente, na função $y = C\,e^x$, obtém-se $y_0 = C\,e^{x_0}$, donde $C = y_0\,e^{-x_0}$. Logo, a função $y = y_0\,e^{(x-x_0)}$ satisfaz a condição inicial dada. De facto, se tivermos $x = x_0$, obteremos $y = y_0\,e^{(x-x_0)} = y_0$. Portanto, a função $y = C\,e^x$ é a solução geral da equação dada.

No caso de $x = 1$ e $y = -1$ obtém-se a solução particular $y = -e^{(x-1)}$.

Do ponto de vista geométrico, a solução geral determina uma família de curvas integrais, que são os gráficos de funções exponenciais. A solução particular considerada é a linha integral que passa pelo ponto $M_0(1, -1)$ (Fig. 5).

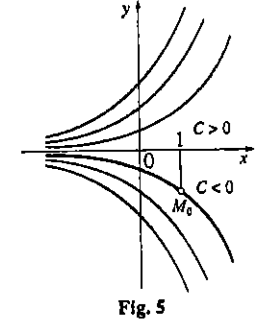


Fig. 5

Uma relação do tipo $\varphi(x, y, C) = 0$, que define implicitamente a solução geral, diz-se o integral geral da equação diferencial de primeira ordem.

Uma relação que se obtém do integral geral dando um valor concreto à constante C designa-se um integral particular da equação diferencial.

Resolver ou integrar uma equação diferencial dada significa determinar a sua solução geral ou o seu integral geral. Se for dada também uma certa condição inicial, é necessário destacar a solução particular que satisfaz essa condição.

Uma vez que, do ponto de vista geométrico, as coordenadas x e y têm a mesma importância, em vez da equação $dy/dx = f(x, y)$, podemos analisar esta outra, equivalente à primeira: $dx/dy = 1/f(x, y)$.

1. Determinar soluções coincidentes das duas seguintes equações diferenciais:

   a) $y' = y^2 + 2x - x^4$; *b*) $y' = -y^2 - y + 2x + x^2 + x^4$.

Para cada uma das seguintes equações, determinar o domínio em que se verifica a unicidade de solução.

2. $y' = x^2 + y^2$.
3. $y' = \dfrac{x}{y}$.
4. $y' = y + 3\sqrt[3]{y}$.
5. $y' = \sqrt{x - y}$
6. $y' = \sqrt{x^2 - y} - x$.
7. $y' = \sqrt{1 - y^2}$.
8. $y' = \dfrac{y+1}{x-y}$.
9. $y' = \sin y - \cos x$.
10. $y' = 1 - \operatorname{ctg} y$.
11. $y' = \sqrt[3]{3x - y} - 1$.

12. Demonstrar que, no caso da equação diferencial $y' = |y|^{\frac{1}{2}}$, não se verifica a unicidade de solução em nenhum ponto do eixo $0x$.

13. Determinar a linha integral da equação $y' = \sin(x \cdot y)$ que passa pelo ponto $0(0, 0)$.

Em cada um dos seguintes exemplos, mostrar que a função dada é solução da equação diferencial correspondente.

14. $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $xy' + y = \cos x$. **15.** $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}$, $y' + 2y = e^{x}$.

16. $y = 2 + C\sqrt{1 - x^2}$, $(1 - x^2)y' + xy = 2x$.

2. O MÉTODO DAS ISOCLINAS

A equação

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

determina, em cada ponto (x, y) onde está definida a função $f(x, y)$, o valor y', ou seja, o declive da tangente ao gráfico da linha integral nesse ponto.

Quando, em cada ponto de um domínio D, é dado o valor de uma certa grandeza, diz-se que está definido o campo dessa grandeza no domínio D. Deste modo, a equação diferencial (1) define o campo das direcções.

O terno de valores (x, y, y') determina a direcção duma recta que passa pelo ponto (x, y). Um conjunto de segmentos dessas rectas dá uma imagem geométrica do campo de direcções.

O problema da integração da equação diferencial (1) pode, portanto, ser encarado do seguinte modo: determinar uma curva tal que a direcção da tangente à mesma em cada ponto coincida com a direcção do campo.

A curva integral pode ser construída com o auxílio das isoclinas. Chama-se isoclina ao lugar geométrico dos pontos nos quais as tangentes às curvas integrais têm todas a mesma direcção. A família das isoclinas da equação diferencial (1) é definida pela equação

$$f(x, y) = k, \tag{2}$$

onde k é um parâmetro. Se dermos a k valores diferentes mas próximos entre si, as isoclinas correspondentes formarão uma rede apertada, com o auxílio da qual se podem construir aproximadamente as curvas integrais da equação (1).

1.ª Observação. A isoclina nula $f(x, y) = 0$ dá-nos a equação das linhas, nas quais se podem encontrar os pontos de máximo e mínimo das curvas integrais. Para se poderem construir com maior exactidão

as curvas integrais, determina-se igualmente o lugar geométrico dos pontos de inflexão. Com esse fim, calcula-se y'' a partir da equação (1):

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = \frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} \tag{3}$$

e iguala-se esta expressão a zero. A linha definida pela equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

é o possível lugar geométrico dos pontos de inflexão.

EXEMPLO 1. Com a ajuda das isoclinas, construa aproximadamente as curvas integrais da equação diferencial $y' = 2x - y$.

Resolução. Para obter a equação das isoclinas, consideremos $y' = k$, com $k = \text{const.}$, de tal modo que

$$2x - y = k, \quad \text{ou } y = 2x - k.$$

As isoclinas são rectas paralelas. No caso de $k = 0$, obtém-se a isoclina $y = 2x$. Esta recta divide o plano $x0y$ em duas partes, em cada uma das quais a derivada y' tem um sinal determinado (Fig. 6).

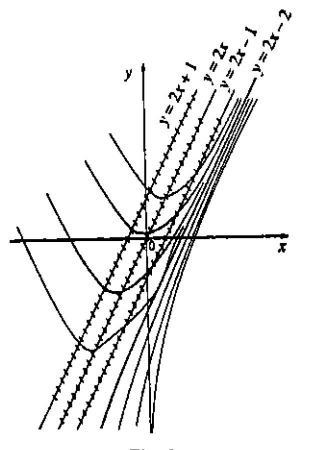


Fig. 6

As curvas integrais, ao intersectarem aquela recta, passam do domínio de decrescimento da função y para o de crescimento, o que significa que nesta recta se encontram os pontos de extremo das curvas integrais, mais precisamente, os seus pontos de mínimo.

Tracemos mais duas isoclinas: $y = 2x + 1$, $k = -1$, e $y = 2x - 1$, $k = 1$.

As tangentes às curvas integrais nos pontos de intersecção com estas formam, com o eixo $0x$, ângulos de 135° e 45°, respectivamente. Calculemos agora a segunda derivada: $y'' = 2 - y' = 2 - 2x + y$.

A recta $y = 2x - 2$, na qual $y'' = 0$, constitui a isoclina para $k = 2$, e, ao mesmo tempo, uma das linhas integrais, como se pode verificar, substituindo na equação. Uma vez que o segundo membro da equação considerada, $f(x, y) = 2x - y$, satisfaz as condições do teorema sobre a existência e unicidade em todo o plano $x0y$, nenhuma outra curva integral intersecta esta isoclina. Uma vez que a isoclina $y = 2x$, na qual se encontram os pontos de mínimo das curvas integrais, está disposta acima da recta $y = 2x - 2$, as curvas integrais que se encontram abaixo desta última não têm pontos de extremo.

A recta $y = 2x - 2$ divide o plano $x0y$ em duas partes: naquela que está situada acima da recta verifica-se $y'' > 0$, o que significa que as curvas integrais situadas neste semiplano têm as concavidades viradas para cima; no semiplano situado abaixo da recta verifica-se $y'' < 0$, o que significa que as curvas integrais situadas deste lado têm as concavidades viradas para baixo. As curvas integrais da equação considerada não têm pontos de inflexão.

O estudo feito permite-nos traçar uma imagem aproximada da família das curvas integrais da equação, conforme se pode ver na Fig. 6.

EXEMPLO 2. Pelo método das isoclinas, construir aproximadamente as curvas integrais da equação $y' = \sin(x + y)$.

Resolução. Da igualdade $y' = k$, $k = \text{const.}$, obtém-se a equação $\sin(x + y) = k$, pelo que k satisfaz as desigualdades $-1 < k < 1$. No caso de $k = 0$, obtém-se $\sin(x + y) = 0$, donde

$$y = -x + \pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{5}$$

As curvas integrais nos pontos de intersecção com estas isoclinas têm tangentes horizontais.

Verifiquemos se as curvas integrais tem pontos de extremo nas isoclinas $y = -x + \pi n$. Determinemos, com este fim, a segunda derivada:

$$y'' = (1 + y') \cos(x + y) = [1 + \sin(x+y)] \cos(x + y).$$

Considerando $y = -x + \pi n$, obtém-se

$$y'' = (1 + \sin \pi n) \cos \pi n = \cos \pi n = (-1)^n.$$

Se n for par, temos $y'' > 0$, pelo que, nos pontos de intersecção com as isoclinas $y = -x + \pi n$, $n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$, as curvas integrais têm mínimos; enquanto, no caso de n ser ímpar, temos $y'' < 0$, donde resulta que as curvas integrais têm máximos nas rectas $y = -x + \pi n$, com $n = \pm 1, \pm 3, \ldots$ Determinemos outras isoclinas:

$$k = -1, \ \sin(x + y) = -1; \ y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \tag{6}$$

$$k = -1, \ \sin(x + y) = 1; \ y = -x + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{7}$$

Todas as isoclinas são rectas paralelas, com declive igual a -1, isto é, intersectam o eixo $0x$ sob um ângulo de 135°. É fácil verificar que as isoclinas $y = -x - \pi/2 + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ são curvas integrais da equação diferencial dada (para tanto, basta substituir a expressão $y = -x - \pi/2 + 2\pi n$ na equação $y' = \sin(x + y)$).

O segundo membro da equação diferencial em estudo, i.e., a função $f(x, y) = \sin(x + y)$, satisfaz as condições do teorema sobre a existência e unicidade de solução em todo o plano $x0y$, pelo que as curvas integrais não se intersectam entre si e, por conseguinte, não intersectam as isoclinas $y = -x - \pi/2 + 2\pi n$. A segunda derivada y'' anula-se quando $1 + \sin(x + y) = 0$, ou seja, nas isoclinas das equações (6) e (7). Ao atravessar da esquerda para a direita uma isoclina do tipo (7), a segunda derivada y'' passa de positiva para negativa. Por exemplo, se considerarmos a faixa situada entre as isoclinas $y = -x$ e $y = -x + \pi$, verifica-se que na isoclina $y = -x + \pi/2$ é satisfeita a igualdade $y'' = 0$, enquanto abaixo dessa isoclina temos $y'' > 0$. Isto significa que as curvas integrais abaixo desta isoclina têm a concavidade virada para cima, enquanto, acima dela (onde $y'' < 0$) têm a concavidade virada para baixo. Logo, as isoclinas do tipo (7) constituem o lugar geométrico dos pontos de inflexão das curvas integrais. Os dados obtidos permitem construir aproximadamente a família das curvas integrais da equação considerada. Para conseguir uma representação mais exacta, convém traçar mais algumas isoclinas (Fig. 7).

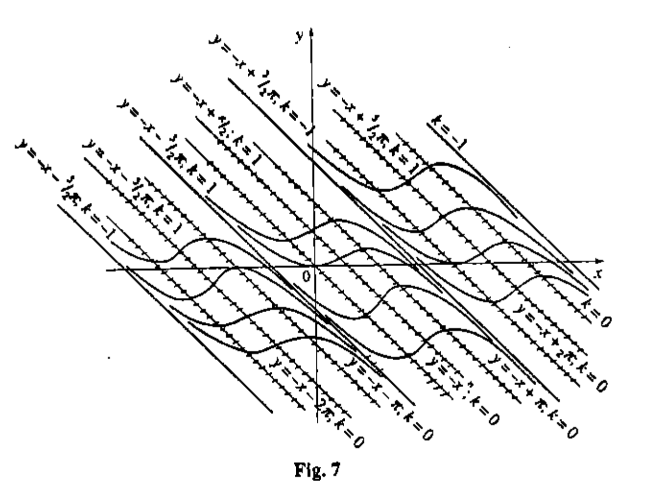


Fig. 7

EXEMPLO 3. Construir, pelo método das isoclinas, as curvas integrais da equação $y' = y - x^2 + 2x - 2$.

Resolução. Se na equação em estudo considerarmos $y' = k$, obteremos a equação das isoclinas:

$$y - x^2 + 2x - 2 = k \quad \text{ou} \quad y = x^2 - 2x + 2 + k.$$

As isoclinas são parábolas com o eixo de simetria na recta vertical $x = 1$. Entre as isoclinas não existem curvas integrais. De facto, se na equação dada substituirmos $y = x^2 - 2x + 2 + k$ e $y' = 2x - 2$, obteremos $2x-2 = x^2 - 2x + 2$; $k - x^2 + 2x - 2$, ou seja, $2x - 2 = k$. Qualquer que seja k, esta última igualdade não se verifica ao longo de toda a isoclina.

Nos pontos de intersecção com a isoclina $y = x^2 - 2x + 2$, correspondente a $k = 0$, as curvas integrais têm tangentes horizontais. Esta isoclina divide o plano $x0y$ em duas partes: numa temos $y' < 0$ (ou seja, as soluções são decrescentes) e na outra, $y' > 0$ (as soluções são crescentes). Uma vez que esta isoclina não coincide com nenhuma curva integral, nela se encontram os pontos de extremo de todas as curvas integrais. Mais precisamente, os pontos de mínimo destas encontram-se na parte da parábola em que se verifica $x < 1$, enquanto os pontos de máximo se encontram na parte da parábola onde $x > 1$. A linha integral que passa pelo ponto (1, 1), i.e. pelo vértice da parábola $y = x^2 - 2x + 2$, não tem extremo neste ponto. Nos pontos de intersecção com as isoclinas $y = x^2 - 2x + 3$ ($k = 1$) e $y = x^2 - 2x + 1$ ($k = -1$), as tangentes às curvas integrais têm declives iguais a 1 e a −1, respectivamente.

A fim de estudarmos a direcção das concavidades das curvas integrais, calculemos a segunda derivada:

$$y''=y' - 2x + 2 = y - x^2 + 2x - 2 - 2x + 2 = y - x^2.$$

Esta função anula-se nos pontos da parábola $y = x^2$. Nos pontos do plano $x0y$, cujas coordenadas satisfazem a condição $y < x^2$, as curvas integrais têm a concavidade virada para baixo ($y'' < 0$), enquanto nos pontos onde $y > x^2$, têm-na virada para cima ($y'' > 0$). Os pontos de intersecção das curvas integrais com a parábola $y = x^2$ são os pontos de inflexão destas curvas. Ou seja, a parábola $y = x^2$ é o lugar geométrico dos pontos de inflexão das curvas integrais.

O segundo membro da equação considerada $f(x, y) = y - x^2 + 2x = 2$ satisfaz em todos os pontos do plano $x0y$ as condições do teorema sobre a existência e unicidade de solução. Logo, por cada ponto do plano passa uma única linha integral da equação.

Com base nos dados obtidos, podemos construir aproximadamente as curvas integrais da equação dada (Fig. 8).

2.ª Observação. Os pontos de intersecção de duas ou várias isoclinas podem ser pontos singulares da equação diferencial (1), i.e. pontos onde o segundo membro desta equação não está definido.

Consideremos a equação $y' = y/x$. A família das isoclinas é definida pela equação $y/x = k$. Trata-se da família das rectas que passam pela origem das coordenadas, pelo que na origem se intersectam isoclinas correspondentes a diferentes declives das tangentes às curvas integrais. É fácil verificar que a solução geral desta equação tem a forma $y = Cx$ e que o ponto (0, 0) é um ponto singular da equação diferencial considerada. Neste caso, as isoclinas são as próprias curvas integrais da equação (Fig. 9).

EXEMPLO 4. Pelo método das isoclinas, construir as curvas integrais da equação $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$.

Resolução. Fazendo a substituição $y' = k$, com $k = \text{const.}$, na equação dada, obtém-se a fórmula das isoclinas: $\frac{y-x}{y+x} = k$. Deste modo, as isoclinas são rectas que passam pela origem das coordenadas O (0, 0).

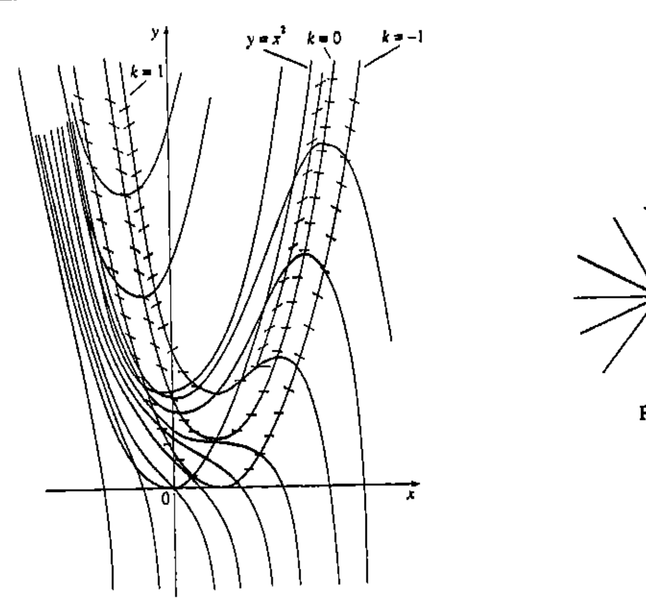


Fig. 8

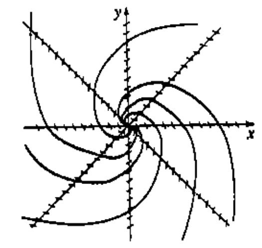


Fig. 9

No caso de $k = -1$, obtém-se a isoclina $y = 0$; para $k = 0$, a isoclina $y = x$; para $k = 1$; a isoclina $x = 0$. Considerando a equação "invertida":

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y+x}{y-x},$$

podemos determinar a isoclina $y = -x$, ao passar pela qual todas as curvas integrais têm tangentes verticais.

O ponto (0, 0) é um ponto singular da equação dada, visto que nele se intersectam todas as isoclinas. Com a ajuda das isoclinas determinadas, podemos construir aproximadamente as curvas integrais (Fig.10).

Fig. 10

17. **Calcular o ângulo α entre as curvas integrais das equações $y' = x + y$ e $y' = x - y$ no ponto $M(2, 1)$.**

18. Determinar o ângulo α de intersecção entre as linhas integrais da equação $y' = x^2 + y^2 + 1$ e o eixo $0x$ no ponto $0\ (0, 0)$.

19. Determinar os pontos de extremo das curvas integrais da equação $y' = x + 1$.

20. **Determinar os pontos de extremo das curvas integrais da equação $y' = y - x^2$.**

Pelo método das isoclinas, construir as curvas integrais das seguintes equações diferenciais:

21. $y' = x + 1$. **31.** $y' = \dfrac{y+1}{x-1}$.

22. $y' = x + y$. **32.** $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

23. $y' = y - x$. **33.** $y' = 1 - x$.

24. $y' = \frac{1}{2}(x - 2y + 3)$ **34.** $y' = 2x - y$.

25. $y' = (y - 1^2)$. **35.** $y' = x^2 + y$.

26. $y' = (y - 1)x$. **36.** $y' = -y / x$.

27. $y' = x^2 - y^2$. **37.** $y' = 1$.

28. $y' = \cos(x - y)$. **38.** $y' = 1 / x$.

29. $y' = y - x^2$. **39.** $y' = y$.

30. $y' = x^2 + 2x - y$. **40.** $y' = y^2$.

3. MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Suponhamos que se pretende determinar a solução $y = y(x)$ da solução da equação diferencial

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

que satisfaz a condição inicial

$$y\big|_{x=x_0} = y_0. \tag{2}$$

Admitamos que num certo rectângulo

$$D\left\{\left|x - x_0\right| < a,\ \left|y - y_0\right| < b\right\},$$

com centro no ponto (x_0, y_0), a equação (1) satisfaz as condições *a*) e *b*) do teorema sobre a existência e unicidade de solução do problema (1)-(2) (v. pág. 2).

A solução do problema (1)-(2) pode ser determinada pelo método das aproximações sucessivas, como a seguir vamos expor.

Construímos uma sucessão $\{y_n(x)\}$ de funções, determinadas pelas relações de recorrência

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[t, y_{n-1}(t)\right] dt,\ n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Como aproximação inicial $y_0(x)$, podemos considerar qualquer função que seja contínua numa vizinhança do ponto $x = x_0$, em particular a função $y_0(x) = y_0$, onde y_0 é o valor inicial do problema de Cauchy (2). Pode demonstrar-se que, sob as condições impostas à equação (1), as aproximações sucessivas da sucessão $\{y(x)\}$ convergem para a solução exacta da equação (1) que satisfaz a condição inicial (2) num certo intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$, onde

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),\ M = \max_{(x,y)\in D} \left|f(x, y)\right|. \tag{4}$$

A estimativa do erro cometido ao substituir a solução exacta pela aproximação $\{y_n(x)\}$ é dada pela desigualdade

$$\left|y(x) - y_n(x)\right| \le \frac{MN^{n-1}}{n!} h^n, \tag{5}$$

onde $N = \max\limits_{(x,y)\in D} \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|$.

Ao aplicar o método das aproximações sucessivas, devemos deter-nos num valor de n tal que a diferença $\left|y_{n+1} - y_n\right|$ não ultrapasse o erro máximo permitido.

EXEMPLO 1. **Pelo método das aproximações sucessivas, calcular a solução da equação $\dfrac{dy}{dx} = y$ que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.**

Resolução. É evidente que a equação dada satisfaz em todo o plano $x0y$ as condições *a*) e *b*) do teorema sobre a existência e unicidade de solução do problema de Cauchy. Vamos construir a sucessão $\{y_n(x)\}$, definida pelas relações de recorrência (3), partindo da aproximação inicial $y_0(x) \equiv 1$:

$$y_0(x) \equiv 1,$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x y_0(t)\, dt = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x y_1(t)\, dt = 1 + \int_0^x (1 + t)\, dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x y_2(t)\, dt = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

Generalizando, obtém-se

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}(t)\,dt = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Torna-se assim claro que $y_n(x) \to e^x$ quando $n \to \infty$. Por substituição, verifica-se imediatamente que a função $y(x) = e^x$ é a solução exacta do problema de Cauchy considerado.

EXEMPLO 2. Pelo método das aproximações sucessivas, determinar a solução da equação $y' = x + y$ que satisfaz a condição inicial $y|_{x=0} = 0$, dentro do rectângulo $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$.

Resolução. No rectângulo considerado verifica-se $|f(x, y)| = x^2 + y^2 \le 2$, donde $M = 2$. Uma vez que h é o menor dos valores $a = 1$ e $b/M = 1/2$, temos $h = 1/2$. De acordo com as fórmulas (4), as aproximações sucessivas vão convergir no intervalo $-1/2 < x < 1/2$. Calculemos estas aproximações:

$$y_0(x) = 0,$$

$$y_1(x) = \int_0^x (t^2 + y_0^2)\,dt = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left[t^2 + y_1^2(t)\right] dt = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} + \frac{2t^{10}}{3\cdot 63} + \frac{t^{14}}{63^2}\right) dt =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59\,535}.$$

O erro absoluto da terceira aproximação é não superior a

$$|y_3(x) - y(x)| \le \frac{2}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 2^2 = \frac{1}{6},$$

visto que, neste caso,

$$N = \max_D \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max_D |2y| = 2.$$

Observação. A função $f(x, y)$ deve satisfazer ambas as condições do teorema sobre a existência e unicidade de solução do problema de Cauchy.

O exemplo que se segue (7) mostra que a continuidade da função $f(x, y)$, por si só, não chega para garantir a convergência das aproximações sucessivas.

Suponhamos que a função $f(x, y)$ é definida do seguinte modo:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ se } x = 0,\ -\infty < y < +\infty, \\ 2x, \text{ se } 0 < x \le 1,\ -\infty < y < 0, \\ 2x - 4y/x, \text{ se } 0 < x \le 1,\ 0 \le y \le x^2, \\ -2x, \text{ se } 0 < x \le 1,\ x^2 \le y \le +\infty. \end{cases}$$

No conjunto $0 \le x \le 1$, $-\infty < y < \infty$ a função $f(x, y)$ é contínua e limitada pela constante $M = 2$. Se o ponto inicial for $(x, y) = (0, 0)$, as aproximações sucessivas no intervalo $0 \le x \le 1$ terão a forma

$$y_0(x) = 0,$$

$$y_1(x) = \int_0^x f(x, y_0(x))\,dx = x^2$$

$$y_2(x) = \int_0^x f(x, x^2)\,dx = \int_0^x \left(2x - \frac{4x^2}{x}\right) dx = -x^2.$$

A forma geral será

$$y_{2n-1}(x) = x^2,\ y_{2n}(x) = -x^2,\ n = 1, 2, \ldots$$

Logo a sucessão $\{y_n(x)\}$ não tem limite, qualquer que seja $x \ne 0$, ou seja, as aproximações sucessivas não convergem. Note-se ainda que nenhuma das subsucessões convergentes $\{y_{2n-1}(x)\}$ ou $\{y_{2n}(x)\}$ converge para a solução exacta, já que temos

$$y'_{2n-1}(x) = 2x = f(x, x^2) = -2x,$$

$$y'_{2n}(x) = -2x = f(x, -x^2) = 2x.$$

Mesmo que as aproximações sucessivas convirjam o seu limite pode não ser a única solução, como se pode ver pelo exemplo seguinte: $y' = y^{1/3}$.

Consideremos essa equação com a condição inicial $y(0) = 0$. Então temos

$$y(x) = \int_0^x y^{\frac{1}{3}}(t)\,dt.$$

Tomando como aproximação inicial $y_0(x) \equiv 0$, teremos

$$y_1(x) \equiv 0,\ y_2(x) \equiv 0, \ldots, y_n(x) \equiv 0,$$

de tal modo que todas as aproximações sucessivas são nulas e logo, convergem para a função nula. Por outro lado, a função $y(x) = (2x/3)^{3/2}$ também é uma solução do problema dado, definida na semi-recta $x \ge 0$.

Nos problemas que se seguem, calcular as três primeiras aproximações sucessivas:

42. $y' = x + y^2$, $\quad y|_{x=0} = 0$.

43. $y' = x + y$, $\quad y|_{x=0} = 1$.

44. $y' = 2y - 2x^2 - 3$, $\quad y|_{x=0} = 2$.

45. $xy' = 2x - y$, $\quad y|_{x=1} = 2$.

4. EQUAÇÕES COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS OU REDUTÍVEIS A ESSA FORMA

Uma equação diferencial do tipo $\varphi(y)\,dy = f(x)\,dx$ tem a designação de equação com variáveis separadas.

Uma equação do tipo

$$\varphi_1(x)\,\psi_1(y)dx = \varphi_2(x)\,\psi_2(y)\,dy,$$

na qual o coeficiente associado a cada diferencial se pode factorizar em funções, dependentes só de x, ou só de y, chama-se equação com variáveis separáveis.

Dividindo ambos os membros pelo produto $\psi_1(y)\,\varphi_2(x)$, a equação fica com as variáveis separadas.

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,dy.$$

O integral geral desta equação tem a forma

$$\int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx - \int \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,dy = C.$$

Observação. A divisão por $\psi_1(y)\,\varphi_1(x)$ pode fazer que se percam soluções particulares que anulam este produto. ✦

Uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

onde a, b e c são constantes, reduz-se a uma equação com variáveis separáveis mediante a substituição de variáveis $z = ax + by + c$.

EXEMPLO 1. Resolver a equação

$$3e^x \operatorname{tg} y\,dx + (2 - e^x)\sec^2 y\,dy = 0.$$

Resolução. Dividimos ambos os membros da equação pelo produto $\operatorname{tg} y(2 - e^x)$:

$$\frac{3e^x\,dx}{2 - e^x} + \frac{\sec^2 y\,dy}{\operatorname{tg} y} = 0.$$

Obtivemos deste modo uma equação com as variáveis separadas. O seu integral geral é

$$-3\ln\left|2 - e^x\right| + \ln\left|\operatorname{tg} y\right| = C_1.$$

Passando à exponencial de ambos os membros, obtém-se

$$\frac{|\operatorname{tg} y|}{\left|2 - e^x\right|^3} = e^{C_1}, \text{ ou } \left|\frac{\operatorname{tg} y}{(2 - e^x)^3}\right| = e^{C_1},$$

donde

$$\frac{\operatorname{tg} y}{(2 - e^x)^3} = \pm e^{C_1},$$

Utilizando a notação $\pm e^{C_1} = C$, teremos

$$\frac{\operatorname{tg} y}{(2 - e^x)^3} = C, \text{ ou } \operatorname{tg} y - C(2 - e^x)^3 = 0.$$

Obtivemos assim o integral geral da equação dada.

Ao dividirmos pelo produto $\operatorname{tg} y\,(2 - e^x)$, partimos do princípio que nenhum dos seus factores se anula. Igualando a zero cada um destes factores, obtemos

$$y = k\,\pi, \ (k = 0, 1, 2, \ldots), \ x = \ln 2.$$

Mediante substituição directa na equação inicial, verifica-se que $y = k\,\pi$ e $x = \ln 2$ são soluções desta equação. Elas podem ser obtidas formalmente do integral geral, fazendo $C = 0$ e $C = \infty$. Este último caso equivale a substituir a constante arbitrária C por $1/C_2$, após o que o integral geral fica com a forma

$$\operatorname{tg} y - \frac{1}{C^2}(2 - e^x)^3 = 0 \text{ ou } C_2 \operatorname{tg} y - (2 - e^x)^3 = 0.$$

Se na última igualdade fizermos $C_2 = 0$, o que equivale a $C = \infty$, teremos $(2 - e^x) = 0$, donde se obtém a solução $x = \ln 2$ da equação considerada. Portanto, as funções $y = k\,\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ e $x = \ln 2$ são soluções particulares da equação dada. Logo, a forma final do integral geral é:

$$\operatorname{tg} y - C\,(2 - e^x)^3 = 0.$$

EXEMPLO 2. Calcular a solução particular da equação

$$(1 + e^x)\,y\,y' = e^x,$$

que satisfaz a condição inicial $y|_{x=0} = 1$.

Resolução. Temos

$$(1+e^x)\, y\, dy/dx = e^x.$$

Separando as variáveis, obtém-se

$$y\,dy = \frac{e^x\,dx}{1+e^x}.$$

Integrando, calcula-se o integral geral

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + C.$$

Substituindo em (1) $x = 0$ e $y = 1$, teremos

$$\tfrac{1}{2} = \ln 2 + C, \text{ donde } C = \tfrac{1}{2} - \ln 2.$$

Substituindo em (1) o valor de C determinado, obtém-se a solução particular

$$y^2 = 1 + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2, \text{ donde } y = \pm\sqrt{1+\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2}.$$

Da condição inicial resulta que $y > 0$ $\left(y|_{x=0} = 1 > 0\right)$, pelo que devemos escolher o sinal positivo antes da raiz. Logo, a solução procurada é

$$y = \sqrt{1+\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2}.$$

EXEMPLO 3. Determinar as soluções particulares da equação $y' \sin x = y \ln y$ que satisfazem as condições iniciais :

a) $y|_{x=\pi/2} = e$; *b)* $y|_{x=\pi/2} = 1$.

Resolução. Temos $\sin x = y \ln y$. Separando as variáveis, obtemos

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Integrando, obtém-se o integral geral

$$\ln|\ln y| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln C.$$

Passando à exponencial, obtém-se

$$\ln y = C \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} \text{ ou } y = e^{C \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

o que constitui a solução geral da equação dada.

a) Consideremos $x = \pi/2$, $y = e$, então $e = e^{C\operatorname{tg}\pi/4}$, donde $C = 1$. A solução particular procurada é $y = e^{\operatorname{tg} x/2}$;

b) Substituindo na equação geral $x = \pi/2$, $y = 1$, teremos $1 = e^{C\operatorname{tg}\pi/4}$, donde $C = 0$. A solução procurada, neste caso, é $y = 1$.

Note-se que ao obter a solução geral a constante C fazia parte do argumento do logaritmo, pelo que o caso $C = 0$ deve ser considerado como um valor limite. A solução particular correspondente, $y = 1$, encontra-se entre os zeros do produto $y \ln y \sin x$, pelo qual dividimos ambos os membros da equação.

EXEMPLO 4. Determinar a equação da curva que passa pelo ponto $(0, -2)$ e tal que o declive da tangente em qualquer dos seus pontos seja igual à ordenada desse ponto, acrescida de três unidades.

Resolução. Entrando em conta com o significado geométrico da primeira derivada, obtemos a equação diferencial da família de curvas que satisfazem a propriedade formulada no enunciado:

$$dy/dx = y + 3.$$

Separando as variáveis e integrando, obtém-se a solução geral:

$$y = C\,e^x - 3. \tag{2}$$

Visto que procuramos uma curva que passe pelo ponto $(0, -2)$, fazendo $x = 0$ e $y = -2$, na fórmula (2) obtém-se $-2 = C - 3$, donde $C = 1$. Logo, a equação da curva procurada é

$$y = e^x - 3.$$

EXEMPLO 5. Determinar uma curva tal que o comprimento do arco que une quaisquer dois pontos P e Q dessa curva seja proporcional à diferença entre as distâncias desses pontos a um certo ponto fixo 0.

Resolução. Se fixarmos o ponto P, o arco QP vai variar proporcionalmente à diferença entre $0Q$ e o comprimento constante de $0P$. Vamos introduzir as coordenadas polares, tomando como pólo o ponto 0 e como eixo polar a recta $0P$ (Fig. 11). Em coordenadas polares, o diferencial do arco de uma curva tem a expressão:

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + (r\,\mathrm{d}\varphi)^2.$$

No caso do nosso problema, temos

$$k^2 (\mathrm{d}r)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + (r\,\mathrm{d}\varphi)^2, \text{ ou } \mathrm{d}\varphi = \sqrt{k^2-1}\,\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Integrando, obtém-se $r = C\,\mathrm{e}^{a\varphi}$ (espiral logarítmica).

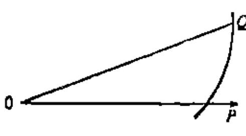


Fig. 11

EXEMPLO 6. Suponhamos que, a uma temperatura constante, a velocidade com que um sólido se dissolve num líquido é proporcional à quantidade desse sólido que ainda se pode dissolver, até que se atinja o ponto de saturação (admitamos que as substâncias sólidas que entram na solução não reagem quimicamente umas com as outras e que a solução ainda está longe do ponto de saturação, pois doutro modo a dependência da velocidade não é linear). Determinar a variação da quantidade de substância dissolvida em função do tempo.

Resolução. Seja P a quantidade de substância que corresponde ao ponto de saturação, e seja x a quantidade de substância que já se dissolveu. Então obtém-se a equação diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(P-x),$$

onde k é o coeficiente de proporcionalidade (conhecido experimentalmente) e t é o tempo. Separando as variáveis, obtém-se

$$\frac{\mathrm{d}x}{P-x} = k\,\mathrm{d}t.$$

Integrando, obtém-se

$$\ln|x-P| = \ln C - kt, \text{ donde } x = P + C\,\mathrm{e}^{-kt}.$$

No momento inicial $t = 0$, temos $x = 0$, logo $C = -P$, de tal modo que

$$x = P(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

EXEMPLO 7. Numa vasilha cilíndrica de volume V_0 está contido ar atmosférico, que se comprime adiabaticamente (sem trocas de calor com o meio ambiente) até atingir o volume V_1. Calcular o trabalho realizado durante a compressão.

Resolução. Sabe-se que o processo adiabático é caracterizado pela equação de Poisson:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^k, \tag{3}$$

onde V_0 é o volume inicial do gás e p_0 é a pressão inicial, tendo k um valor constante para o gás considerado.

Representemos por V e p, respectivamente, o volume e a pressão do gás no momento em que o êmbolo se encontra à altura h, e por S, a área do êmbolo. Então, quando o êmbolo tem uma deslocação $\mathrm{d}h$, o volume do gás diminui em $\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}h$. Durante este processo o trabalho realizado é

$$\mathrm{d}W = -p\,S\,\mathrm{d}h, \text{ ou } \mathrm{d}W = -p\,\mathrm{d}V. \tag{4}$$

Determinando p a partir da fórmula (3) e substituindo em (4), obtém-se a equação diferencial do processo:

$$\mathrm{d}W = -\frac{p_0 V_0^k}{V^k}\,\mathrm{d}V.$$

Integrando esta equação, temos

$$W = -p_0 V_0^k \int \frac{\mathrm{d}V}{V^k} = \frac{p_0 V_0^k}{(k-1)\,V^{k-1}} + C, \quad k \neq 1. \tag{5}$$

De acordo com a condição inicial, a igualdade (5) dá-nos

$$C = -p_0 V_0 / (k-1).$$

Deste modo, o trabalho realizado durante a compressão adiabática de V_0 até V será

$$W = \frac{p_0 V_0}{k-1}\left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{k-1} - 1\right].$$

No caso de $V = V_1$, obtém-se

$$W_1 = \frac{p_0 V_0}{k-1}\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{k-1} - 1\right].$$

EXEMPLO 8. Calcular a solução da

$$x^3 \sin \cdot y' = 2 \tag{6}$$

que satisfaz a condição

$$y \to \pi/2 \text{ quando } x \to \infty, \tag{7}$$

Resolução. Separando as variáveis e integrando, obtém-se o integral geral da equação (6):

$$\cos y = 1/x^2 + C.$$

Da condição (7) resulta que $\cos(\pi/2) = C$, i.e. $C = 0$, de tal modo que o integral particular vai ter a forma $\cos y = 1/x^2$. A este integral corresponde uma infinidade de soluções particulares da forma

$$y = \pm \arccos \frac{1}{x^2} + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{8}$$

Entre estas soluções existe uma única que satisfaz a condição (7) quando $x \to \infty$ na igualdade 8:

$$\pi/2 = \arccos 0 + 2\pi n, \text{ ou } \pi/2 = \pi/2 + 2\pi n,$$

donde

$$1/2 = \pm 1/2 + 2n. \tag{9}$$

É fácil verificar que a equação (9) tem duas raízes: $n = 0$ e $n = 1/2$. A raiz $n = 1/2$, que corresponde ao sinal menos antes de arccos $(1/x^2)$, não nos serve, porque n tem de ser inteiro ou nulo. Deste modo, a solução procurada da equação (6) é

$$y = \arccos(1/x^2).$$

Integrar as seguintes equações diferenciais:

46. $(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0.$ **47.** $(1+y^2)\,dx + xy\,dy = 0.$

48. $y' \sin x - y\cos x = 0,\ y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1.$ **49.** $(1+y^2)\,dx = x\,dy.$

50. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$ **51.** $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0,\ y\big|_{x=0} = 1.$

52. $e^{-y}(1+y') = 1.$ **53.** $y\ln y\,dx + x\,dy = 0,\ y\big|_{x=1} = 1.$

54. $y' = a^{x+y}\ \ (a > 0,\ a \neq 1).$ **55.** $e^y(1+x^2)\,dy - 2x(1+e^y)\,dx = 0.$

56. $2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2).$ **57.** $e^x \sin^3 y + (1+e^{2x})\cos y \cdot y' = 0.$

58. $\sin x\,dx + \cos^2 x \ln y\,dy = 0.$ **59.** $y' = \sin(x-y).$

60. $y' = ax + by + c\ (a,\ b,\ c - \text{const}).$ **61.** $(x+y)^2 y' = a^2.$

62. $y + xy' = a(1+xy),\ y\big|_{x=\frac{1}{a}} = -a.$

63. $(a^2+y^2)\,dx + 2x\sqrt{ax-x^2}\,dy = 0,\ y\big|_{x=a} = 0.$ **64.** $y' + \sin(x-y) = \sin(x+y),\ y\big|_{x=\pi} = \frac{\pi}{2}.$

65. Determinar a equação da curva que passa pelo ponto (0, –2) e tal que o declive da tangente em qualquer ponto seja igual ao triplo da ordenada desse ponto.

66. Determinar a função $y(x)$, tal que a área delimitada pelo gráfico de $y(x)$, o eixo $0x$, e as rectas $X = 0$ e $X = x$, pode ser dada pela expressão: $Q = a^2 \ln(y/a)$.

67. Um ponto material de massa igual a 1 g está animado de movimento rectilíneo, sob a acção de uma força, directamente proporcional ao tempo decorrido desde o momento $t = 0$, e inversamente proporcional à velocidade do ponto. Sabe-se que no momento $t = 10$ s a velocidade era de 50 cm/s e a força era de 4 din. Qual será a velocidade do ponto 1 minuto após o início do movimento?

68. Demonstre que a circunferência é a única curva tal que as normais a todos os seus pontos se intersectam no mesmo ponto.

69. Uma bala penetra numa tábua com espessura $h = 10$ cm à velocidade $v = 200$ m/s e sai dela à velocidade de 80 m/s. Sabendo que a força de resistência da tábua ao movimento da bala é proporcional ao quadrado da velocidade, determinar o tempo que a bala demora a atravessar a tábua.

70. O movimento dum navio é retardado pela força de resistência da água, a qual é proporcional à velocidade do navio. Sabe-se que a velocidade inicial do navio era de 10m/s e que ao fim de 5 s passou a ser 8 m/s. Ao fim de quanto tempo a velocidade será de 1 m/s?

71. Demonstrar que a curva tal que o declive da tangente em qualquer ponto é proporcional à abcissa desse ponto e à parábola.

72. De acordo com a lei de Newton, a velocidade de arrefecimento de um certo corpo exposto ao ar é proporcional à diferença entre a temperatura T do corpo e a temperatura T_0 do ar. Sabendo que a temperatura do ar é de 20° C e que o corpo arrefeceu em 20 min de 100° para 60°, ao fim de quanto tempo a sua temperatura baixará para 30°?

73. Determinar a equação da curva que tem a seguinte propriedade: o declive da tangente em qualquer dos seus pontos é n vezes maior do que o declive da recta que une esse ponto à origem das coordenadas.

74. Determinar o caminho S percorrido por um corpo durante o tempo t, sabendo que a sua velocidade é proporcional ao espaço percorrido e que o corpo percorre 100 m em 10 s e 200 m em 15 s.

75. O fundo de um reservatório com uma capacidade de 300 l está coberto de sal. Admitindo que a velocidade de dissolução do sal é proporcional à diferença entre a sua concentração num dado momento e a concentração da solução saturada (que é de 1 kg de sal por 3 l de água) e sabendo que a quantidade de água pura presente dissolve $1/3$ kg de sal num minuto, determinar a quantidade de sal na solução ao fim de 1 hora.

76. Uma certa quantidade de uma substância insolúvel contém nos seus poros 10 kg de sal. Tendo-a submetido à acção de 90 l de água, verificou-se que ao fim de 1 hora se tinha dissolvido metade do sal nela contido. Quanto sal se teria dissolvido durante o mesmo tempo, se a quantidade de água fosse duas vezes maior? A velocidade de dissolução é proporcional à quantidade de sal não dissolvido num dado momento e à concentração da solução saturada (1 kg por 3 l).

77. Determinar a equação da curva que tem a seguinte propriedade: o segmento da tangente à curva, situado entre os dois eixos das coordenadas, tem o seu ponto médio no ponto de tangência.

78. Uma certa quantidade de uma substância que contém 3 kg de humidade foi colocada num compartimento com 100 m^3 de volume, onde o ar tinha inicialmente 25% de humidade. À mesma temperatura, o ar fica saturado com 0,12 kg de humidade por 1 m^3. Se durante o primeiro dia a substância perdeu metade da sua humidade, quanta humidade se conservará nela ao fim de dois dias? *Indicação*. A humidade que se encontra numa substância porosa evapora-se para o meio ambiente com uma velocidade proporcional à quantidade de humidade contida na substância dada e à diferença entre a humidade do ar ambiente e a humidade do ar saturado.

79. Uma certa quantidade de uma substância insolúvel, que contém nos seus poros 2 kg de sal, é sujeita à acção de 30 l de água. Ao fim de 5 minutos dissolveu-se 1 kg de sal. Dentro de quanto tempo se dissolverá 99% do sal existente no início?

80. Uma parede de tijolos tem 30 cm de espessura. Determinar a variação da temperatura na parede em função da distância de cada ponto à face exterior da mesma, sabendo que a temperatura é de 20° na superfície interior da parede e de 0° na exterior. Determinar ainda a quantidade de calor que passa da parede para o exterior durante 1 dia (por cada cm^2).

Indicação. De acordo com a lei de Newton, a velocidade Q com que o calor se propaga através de uma secção A, perpendicular ao eixo $0x$, é igual a $Q = -k\,S\,dT/dt$, onde k é o coeficiente de condutividade térmica da substância em causa (neste caso, $k = 0{,}0015$), T é a temperatura, t é o tempo e S é a área do sector A.

81. Mostre que a equação $dy/dx = y/x$ tem uma infinidade de soluções da forma $y = Cx$ que satisfazem a condição inicial $y|_{x=0} = 0$. Mostre também que se a condição inicial for $y|_{x=0} = y_0 \neq 0$, a mesma equação não tem nenhuma solução. Construa as curvas integrais desta equação.

82. Mostre que o problema de Cauchy $dy/dx = y^\alpha$, $y|_{x=0} = 0$, tem, pelo menos, duas soluções se $0 < \alpha < 1$ e apenas uma, no caso de $\alpha = 1$. Construir as curvas integrais nos casos de $\alpha = 1/2$, $\alpha = 1$.

83. Determinar a solução da equação $dy/dx = y|\ln y|^\alpha$, $\alpha > 0$, que satisfaz a condição inicial $y|_{x=0} = 0$. Para que valores de α o problema dado pode ter mais do que uma solução?

84. Mostrar que as tangentes a todas as curvas integrais da equação diferencial $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = x\,\mathrm{tg}\,x + 1$, nos seus pontos de intersecção com o eixo $0y$, são paralelas. Determinar o ângulo sob o qual estas curvas integrais intersectam o eixo $0y$.

Integre as seguintes equações diferenciais:

85. $\cos y' = 0$. **87.** $\sin y' = x$. **89.** $\mathrm{tg}\, y' = 0$.

86. $e^{y'} = 1$. **88.** $\ln y' = x$. **90.** $e^{y'} = x$. **91.** $\mathrm{tg}\, y' = x$.

Determinar as soluções de cada uma das seguintes equações que satisfazem as condições indicadas:

92. $x^2 y' \cos y + 1 = 0$, $y \to \frac{16}{3}\pi$, $x \to +\infty$. **93.** $x^2 y' \cos 2y = 1$, $y \to \frac{10}{3}\pi$, $x \to +\infty$.

94. $x^3 y' \sin y = 1$, $y \to 5\pi$, $x \to \infty$. **95.** $(1+x^2)y' - \frac{1}{2}\cos^2 2y = 0$, $y \to \frac{7}{2}\pi$, $x \to -\infty$.

96. $e^y = e^{4y}\, y' + 1$, y é limitado quando $x \to +\infty$.

97. $(x+1)\, y' = y - 1$, y é limitado quando $x \to +\infty$.

98. $y' = 2x(\pi + y)$, y é limitado quando $x \to \infty$.

99. $x^2 y' + \sin 2y = 1$, $y \to \frac{11}{4}\pi$, $x \to +\infty$.

5. EQUAÇÕES HOMOGÉNEAS E REDUTÍVEIS A ESSA FORMA

1. Equações homogéneas.

A função $f(x, y)$ diz-se uma função homogénea de grau n dos seus argumentos se for verdadeira a igualdade $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Por exemplo, a função $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ é uma função homogénea de segundo grau, porque $f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty) = t^2(x + y - xy) = t^2 f(tx, ty)$.

No caso de $n = 0$ temos as funções homogéneas de grau zero. Por exemplo, $f(x, y) = (x - y)/(x + y)$ é uma função homogénea de grau zero, uma vez que uma equação diferencial com a forma $dy/dx = f(x, y)$ diz-se homogénea em ordem a x e y se $f(x, y)$ for uma função homogénea de grau zero dos seus argumentos. Uma equação homogénea pode sempre ser representada sob a forma

$$dy/dx = \varphi(y/x). \tag{1}$$

Introduzindo como nova incógnita a função $u = y/x$, a equação (1) pode ser reduzida a uma equação com variáveis separáveis:

$$x\, du/dx = \varphi(u) - u.$$

Se $u = u_0$ for uma raiz da equação $\varphi(u) - u = 0$, então a solução da equação homogénea será $u = u_0$ ou $y = u\, x$ (recta que passa pela origem das coordenadas).

Observação. Para resolver equações homogéneas não é forçoso reduzi-las à forma (1). À equação inicial pode ser aplicada imediatamente a substituição $y = u\, x$.

EXEMPLO 1. Resolver a equação $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Resolução. Esta equação pode ser escrita sob a forma

$$y' \sqrt{1-(y/x)^2} + \frac{y}{x}$$

de tal modo que se torna homogénea em ordem a x e y. Seja $u = y/x$ ou $y = u\, x$. Então temos $y' = x\, u' + u$. Substituindo na equação considerada as expressões de y e y', obtém-se

$$x \frac{du}{dx} = \sqrt{1-u^2}.$$

Façamos a separação de variáveis:

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando ambos os membros da última equação, obtém-se

$$\operatorname{arcsen} u = \ln|x| + \ln C_1 \quad (C_1 > 0), \text{ ou } \operatorname{arcsen} u = \ln C_1|x|.$$

Uma vez que $C_1|x| = \pm C_1 x$, se utilizarmos a notação $\pm C_1 = C$, obteremos arcsen $u = \ln Cx$, onde $|\ln Cx| \le \pi/2$, ou $e^{-\pi/2} \le Cx \le e^{\pi/2}$. Substituindo de novo u por y/x, obteremos o integral geral

$$\operatorname{arcsen}(y/x) = \ln Cx.$$

Daqui resulta que a solução geral é $y = x \operatorname{sen} \ln Cx$. Ao separar as variáveis, dividimos ambos os membros da equação por $x\sqrt{1-u^2}$, pelo que podemos ter perdido as soluções que tornam nulo este produto.

Suponhamos que $x = 0$ ou $\sqrt{1-u^2} = 0$. Mas $x = 0$ não é solução (doutro modo, não faria sentido a substituição $u = y/x$). Logo, da igualdade $\sqrt{1-u^2} = 0$ resulta que $1 - y^2/x^2 = 0$, donde $y = \pm x$. Mediante a substituição na equação inicial, verifica-se imediatamente que as funções $y = x$ e $y = -x$ também são solução da equação considerada.

EXEMPLO 2. Considere-se a família de curvas integrais C_α da equação homogénea

$$y' = \varphi(y/x). \tag{2}$$

Demonstrar que as tangentes às curvas definidas pela equação homogénea (2) em pontos correspondentes (*) são paralelas entre si.

Resolução. Segundo a definição de pontos correspondentes, verifica-se que $y/x = y_1/x_1$, pelo que da própria equação (2) resulta que

$$y' = y_1',$$

onde y' e y_1' são os declives das tangentes às curvas C_α e C_{α_1} nos pontos M e M_1, respectivamente (Fig. 12).

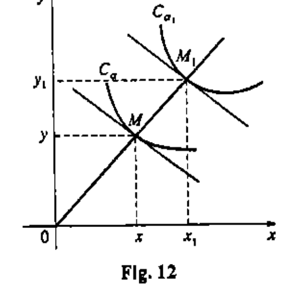


Fig. 12

(*) Dois pontos de duas curvas C_α dizem-se correspondentes se estiverem situados na mesma recta que passa pela origem das coordenadas.

Integre as seguintes equações diferenciais:

100. $xy' = y + x\cos^2\dfrac{y}{x}$.

101. $(x-y)\,dx + x\,dy = 0$.

102. $xy' = y(\ln y - \ln x)$.

103. $x^2\,dy = (y^2 - xy + x^2)\,dx$.

104. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

105. $2x^2y' = x^2 + y^2$.

106. $(4x-3y)\,dx + (2y-3x)\,dy = 0$.

107. $(y-x)\,dx + (y+x)\,dy = 0$.

2. Equações redutíveis a homogéneas.

A. Consideremos uma equação diferencial com a forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \tag{3}$$

onde a, b, c, a_1, b_1 e c_1 são constantes e $f(u)$ é uma função contínua do seu argumento u.

No caso de $c = c_1 = 0$ a equação (3) é homogénea e pode ser integrada pelo método acima descrito. Se pelo menos uma das constantes c ou c_1 for diferente de zero, teremos de distinguir dois casos:

1) O determinante $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Neste caso, introduzindo as novas variáveis ξ e η de acordo com as fórmulas $x = \xi + h$, $y = \eta + k$, onde h e k são, por enquanto, constantes indeterminadas, reduzimos a equação (3) à forma

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta + ah + bk + c}{a_1\xi + b_1\eta + a_1h + b_1k + c_1}\right).$$

Se h e k forem a solução do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases} \quad (\Delta \neq 0), \tag{4}$$

ficaremos com uma equação homogénea da forma

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right).$$

Determinando o integral geral desta equação e substituindo nele ξ por $x - h$ e η por $y - k$, obteremos o integral geral da equação (3).

2) O determinante $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$.

Neste caso, o sistema (4), em geral, não tem solução e o método que acabamos de descrever não é aplicável. Então temos $a_1/a = b_1/b = \lambda$ e, por conseguinte, a equação (3) tem a forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right).$$

Através da substituição $z = ax + by$, obtemos daqui uma equação com variáveis separáveis.

EXEMPLO 3. **Resolver a equação**

$$(x+y-2)\,dx + (x-y+4)\,dy = 0. \tag{5}$$

Resolução. Consideremos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x - y + 4 = 0. \end{cases}$$

Verifiquemos que o determinante deste sistema é diferente de zero:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

O sistema tem como solução única $x_0 = -1$, $y_0 = 3$. Logo, a substituição de variáveis a aplicar na equação (5) é $x = \xi - 1$, $y = \eta + 3$. Feita esta substituição, a equação (5) toma a forma

$$(\xi + \eta)\,d\xi + (\xi - \eta)\,d\eta = 0. \tag{6}$$

A equação (6) já é homogénea. Então, podemos aplicar-lhe a substituição $\eta = u\xi$, que a reduz à forma

$$(\xi + \xi u)\,d\xi + (\xi - \xi u)(\xi\,du + u\,d\xi) = 0,$$

donde se obtém

$$(1 + 2u - u^2)\,d\xi + \xi(1-u)\,du = 0.$$

Nesta última equação podemos separar as variáveis:

$$d\xi/\xi + (1-u)/(1+2u-u^2)\, du = 0.$$

Integrando ambos os membros, obtém-se

$$\ln|\xi| + {}^1\!/_2 \ln\left|1+2u-u^2\right| = \ln C, \text{ ou } \xi(1+2u-u^2) = C.$$

Regressando às variáveis x e y, o integral geral é:

$$(x+1)^2\left[1+2\frac{y-3}{x+1}-\frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right] = C_1,$$

ou

$$x^2+2xy-y^2-4x+8y = C \quad (C = C_1+14).$$

EXEMPLO 4. Resolver a equação $(x+y+1)\,dx+(2x+2y-1)\,dy = 0$.

Resolução. O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$$

é incompatível. Neste caso, o método utilizado no último exemplo não é aplicável. Para integrar a equação diferencial aplica-se a substituição $x+y=z$, $dy = dz - dx$. A equação adquire a forma

$$(2-z)\,dx + (2z-1)\,dz = 0.$$

Separando as variáveis, obtém-se:

$$dx - \frac{2z-1}{z-2}\,dz = 0, \text{ donde } x-2z-3\ln|z-2| = C.$$

Regressando às variáveis x, y, obtém-se o integral geral da equação dada $x+2y+3\ln|x+y-2| = C$.

Resolver as seguintes equações:

108. $x+y-2+(1-x)\,y' = 0$.

109. $(3y-7x+7)\,dx-(3x-7y-3)\,dy = 0$.

110. $(x+y-2)\,dx+(x-y+4)\,dy = 0$.

111. $(x+y)\,dx+(x-y-2)\,dy = 0$.

112. $2x+2y-5+(3x+2y-5)\,y' = 0$.

113. $8x+4y+1+(4x+2y+1)\,y' = 0$.

114. $(x-2y-1)\,dx+(3x-6y+2)\,dy = 0$.

115. $(x+y)\,dx+(x+y-1)\,dy = 0$.

B. Por vezes, é possível tornar uma equação homogénea através da substituição de variável $y = z^\alpha$. Isto acontece quando todos os termos da equação dada tiverem o mesmo grau, convencionando que o grau de um termo é igual à soma do expoente de x com o expoente de y, multiplicado por α, e o expoente de dy/dx, multiplicado por $\alpha - 1$.

EXEMPLO 5. Resolver a equação

$$(x^2y^2-1)\,dy + 2xy^3\,dx = 0. \tag{7}$$

Resolução. Fazemos a substituição $y = z^\alpha$, $dy = \alpha z^{\alpha-1}\,dz$, onde α é, por enquanto, um número arbitrário, que escolheremos mais adiante. Substituindo na equação as expressão de y e dy, obtém-se

$$(x^2z^{2\alpha}-1)\,\alpha z^{\alpha-1}\,dz + 2xz^{3\alpha}\,dx = 0,$$

ou

$$(x^2z^{2\alpha-1}-z^{\alpha-1})\,\alpha\,dz + 2xz^{3\alpha}\,dx = 0.$$

Notemos que o termo $x^2z^{3\alpha-1}$ tem grau $2+3\alpha-1 = 3\alpha+1$, tal como o termo $xz^{3\alpha}$, enquanto o termo $z^{\alpha-1}$ tem grau $\alpha - 1$. A equação obtida será homogénea se todos os termos tiverem o mesmo grau, isto é, se for satisfeita a condição $3\alpha+1 = \alpha-1$, ou $\alpha = -1$.

A substituição a fazer é $y = 1/z$. Então a equação (7) toma a forma

$$\left(\frac{1}{z^2}-\frac{x^2}{z^4}\right)dz + 2\frac{x}{z^3}\,dx = 0,$$

ou

$$(z^2-x^2)\,dz + 2zx\,dx = 0.$$

Façamos agora a substituição $z = ux$, $dz = u\,dx + x\,du$. Então a última equação transforma-se em $(u^2-1)(u\,dx + x\,du) + 2u\,dx = 0$, donde

$$u(u^2+1)\,dx + x(u^2-1)\,du = 0.$$

Separem-se as variáveis nesta última equação:

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2-1}{u^3+u}\,du = 0.$$

Integrando agora, obtém-se

$$\ln|x| + \ln(u^2+1) - \ln|u| = \ln|C|, \text{ ou } \frac{x(u^2+1)}{u} = C.$$

Substituindo u por $1/xy$, obtém-se o integral geral da equação dada:

$$1 + x^2y^2 = Cy.$$

A equação (7) tem a solução trivial $y = 0$, que se obtém do integral geral, se exprimirmos o integral sob a forma $y = (1 + x^2y^2)/C$ e considerarmos o caso limite quando $C \to \infty$. Deste modo, a função $y = 0$ é uma solução particular da equação considerada.

Integre as seguintes equações:

116. $2xy'(x - y^2) + y^3 = 0$.

117. $2y^6 + x^3 = 6xy^5y'$.

118. $y\left(1 + \sqrt{x^2y^4 + 1}\right)dx + 2x\,dy = 0$.

119. $(x + y^3)\,dx + 3(y^3 - x)\,y^2\,dy = 0$.

120. Determinar a equação da curva tal que a distância entre a tangente a qualquer ponto e a origem das coordenadas é igual à abcissa desse ponto.

121. Determinar a equação da curva para a qual é constante a razão entre o comprimento do segmento do eixo Oy, delimitado pela tangente a cada ponto, e o comprimento do raio-vector desse ponto.

122. Determinar, em coordenadas rectangulares, a forma de um espelho que reflicta todos os raios, provenientes dum certo ponto, segundo uma direcção dada.

123. Determinar a equação da curva para a qual o comprimento do segmento do eixo Oy, delimitado pela normal a cada ponto, é igual à distância desse ponto à origem das coordenadas.

124. Determinar a equação da curva que tem a seguinte propriedade: o produto da abcissa de qualquer ponto pelo comprimento do segmento do eixo Oy, delimitado pela normal a esse ponto, é igual ao dobro do quadrado da distância desse ponto à origem das coordenadas.

6. EQUAÇÕES LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM. EQUAÇÃO DE BERNOULLI

1.º Equações lineares de primeira ordem.

Chama-se equação linear de primeira ordem a uma equação linear em relação à função incógnita e à sua derivada. A sua forma é

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x), \qquad (1)$$

onde p e q são funções de x conhecidas, contínuas no domínio em que se pretende integrar a equação (1).

No caso de $q(x) \equiv 0$, a equação (1) diz-se linear homogénea. Nesse caso, as variáveis são separáveis e o integral geral é

$$y = C\,e^{-\int p(x)\,dx}.$$

A solução geral duma equação não homogénea pode ser determinada pelo método da variação da constante, que consiste no seguinte. Procura-se a solução da equação (1) sob a forma

$$y = C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}.$$

onde $C(x)$ é uma nova função incógnita de x.

EXEMPLO 1. Resolver a equação diferencial

$$y' + 2xy = 2x\,e^{-x^2}. \qquad (2)$$

Resolução. Apliquemos o método de variação da constante. Consideremos a equação homogénea

$$y' + 2xy = 0,$$

associada à equação não homogénea dada. Trata-se de uma equação com as variáveis separáveis. A sua solução geral tem a forma

$$y = C\,e^{-x^2}.$$

Vamos procurar a solução geral da equação não homogénea sob a forma

$$y = C(x)\,e^{-x^2}, \qquad (2)$$

onde $C(x)$ é uma função incógnita de x. Substituindo (3) em (2) obtém-se $C'(x) = 2x$, donde $C(x) = x^2 + C$. Deste modo, a solução geral da equação será

$$y = (x^2 + C)\,e^{-x^2},$$

onde C é a constante da integração.

Observação. Pode acontecer que a equação diferencial seja linear em relação a x, enquanto função de y. A forma normal de uma tal equação é

$$\frac{dx}{dy} + r(y)\,x = \varphi(y).$$

EXEMPLO 2. Resolver a equação $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$.

Resolução. A equação dada é linear, se considerarmos x como função de y:

$$\frac{dx}{dy} - x\cos y = \sin 2y. \tag{4}$$

Apliquemos o método de variação da constante. Comecemos por resolver a equação homogénea associada

$$\frac{dx}{dy} - x\cos y = 0,$$

a qual tem as variáveis separáveis. A sua solução geral tem a forma

$$x = C\,e^{\sin y}, \quad C = \text{const.}$$

Procuremos a solução geral da equação (4) sob a forma

$$x = C(y)\,e^{\sin y},$$

onde $C(y)$ é uma função incógnita de y. Substituindo (5) em (4) obtém-se:

$$C'(y)\,e^{\sin y} + C(y)\,e^{\sin y}\cos y - C(y)\,e^{\sin y}\cos y = \sin 2y$$

ou

$$C'(y) = e^{-\sin y}\,2y.$$

Daqui, integrando por partes, obtém-se

$$C(y) = \int e^{-\sin y}\sin 2y\,dy = 2\int e^{-\sin y}\cos y\sin y\,dy =$$

$$= 2\int \sin y\,d(-e^{-\sin y}) = 2(-\sin y\,e^{-\sin y} + \int e^{-\sin y}\cos y\,dy) =$$

$$= 2(-\sin y\,e^{-\sin y} - e^{-\sin y}) + C;$$

portanto,

$$C(y) = -2\,e^{-\sin y}(1 + \sin y) + C.$$

Substituindo (6) em (5), obtém-se a solução da equação (4) e, por conseguinte, da equação dada:

$$x = C\,e^{\sin y} - 2(1 + \sin y). \ ✦$$

A equação (1) também pode ser integrada do seguinte modo. Seja

$$y = u(x)\,v(x), \tag{7}$$

onde $u(x)$ e $v(x)$ são funções incógnitas de x, uma das quais, por exemplo $v(x)$, pode ser escolhida arbitrariamente. Substituindo (7) em (1) e transformando o resultado, obtém-se

$$vu' + (pv + v')\,u = q(x). \tag{8}$$

Após determinar $v(x)$ a partir da condição $v' + pv = 0$, calcula-se $u(x)$ da equação (8) e, deste modo, obtém-se a solução $y = uv$ da equação (1). No lugar de $v(x)$ podemos colocar qualquer solução particular da equação $v' + pv = 0$, tal que $v \not\equiv 0$.

EXEMPLO 3. Resolver o seguinte problema de Cauchy:

$$x(x-1)\,y' + y = x^2(2x-1), \tag{9}$$

$$y\big|_{x=2} = 4. \tag{10}$$

Resolução. Vamos procurar a solução geral da equação (9) sob a forma

$$y = u(x)\,v(x);$$

então $y'(x) = u'v + uv'$.

Substituindo na equação (9), obtém-se

$$x(x-1)\,(u'v + uv') + uv = x^2(2x-1),$$

ou

$$x(x-1)\,vu' + [x(x-1)\,v' + v]\,u = x^2(2x-1). \qquad (11)$$

A função $v = v(x)$ pode ser determinada da condição $x(x-1)\,v' + v = 0$. Tomando como $v(x)$ qualquer solução particular desta equação, por exemplo, $v = x/(x-1)$, e substituindo-a em (11), obtém-se a equação $u' = 2x - 1$, da qual resulta $u(x) = x^2 - x + C$. Por conseguinte, a equação geral da equação (9) será

$$y = uv = (x^2 - x + C)\frac{x}{x-1}, \text{ ou } y = \frac{Cx}{x-1} + x^2.$$

Utilizando a condição inicial (10) para determinar C, obtém-se a equação $4 = C\dfrac{2}{2-1} + 2^2$, donde $C = 0$; por conseguinte, a solução do problema de Cauchy considerado é $y = x^2$.

EXEMPLO 4. **Se R for a resistência dum circuito eléctrico e L for a auto-indução, a relação entre a intensidade de corrente i e a força electromotriz E é dada pela equação $E = Ri + L\,di/dt$, onde R e L** são constantes. Se considerarmos E função do tempo t, temos uma equação linear não homogénea, cuja incógnita é i:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E(t)}{L}.$$

Determinar a intensidade de corrente $i(t)$ no caso de $E = E_0 =$ const. e $i(0) = i_0$.

Resolução. Temos

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}, \qquad (12)$$

$$i(0) = I_0. \qquad (13)$$

A solução geral da equação (12) tem a forma

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + C\,e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (14)$$

Utilizando a condição inicial (13), obtém-se, a partir de (14), que $C = I_0 - E_0/R$; logo, a solução procurada será

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + \left(I_0 - \frac{E_0}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Da última expressão torna-se evidente que a intensidade de corrente $i(t)$ tende para o valor E_0/R à medida que o tempo t aumenta.

EXEMPLO 5. Considere a família C_α das curvas integrais da equação linear não homogénea $y' + p(x)\,y = q(x)$.

Mostre que as tangentes às curvas C_α, em pontos correspondentes (*), se intersectam todas num certo ponto (Fig. 13).

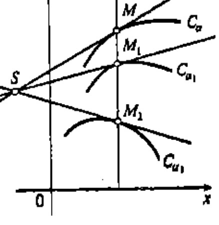


Fig. 13

Resolução. Consideremos a tangente a uma curva arbitrária C_α num ponto $M(x, y)$. A equação da tangente no ponto $M(x, y)$ é dada pela equação

$$\eta - q(x)\,(\xi - x) = y[1 - p(x)\,(\xi - x)],$$

onde ξ e η são as coordenadas de qualquer ponto da tangente. Nos pontos correspondentes, por definição, x é constante, enquanto y varia. Tomando duas tangentes arbitrárias às linhas C_α em pontos correspondentes e sendo S o seu ponto de intersecção, as coordenadas deste ponto serão:

$$\xi = x + \frac{1}{p(x)}, \qquad \eta = \frac{q(x)}{p(x)}. \qquad (15)$$

Daqui resulta que todas as tangentes as curvas C_α em pontos correspondentes (com um dado x) se intersectam no ponto S com as coordenadas

$$S\left(x + \frac{1}{p(x)},\ \frac{q(x)}{p(x)}\right).$$

Se do sistema (15) excluirmos a variável x, obtém-se a equação do lugar geométrico dos pontos S:

$$f(\xi, \eta) = 0.$$

(*) Dois pontos de duas curvas C_α dizem-se correspondentes se tiverem a mesma abcissa.

EXEMPLO 6. Determinar a solução da equação $y' - y = \cos x - \sin x$ que satisfaz a seguinte condição: y é limitada quando $x \to \infty$.

Resolução. A solução geral da equação dada tem a forma

$$y = C\,e^{x} + \sin x.$$

Qualquer solução da equação, que se obtenha da solução geral com $C \neq 0$, será ilimitada, uma vez que, quando $x \to \infty$, $\sin x$ é limitada, enquanto $e^{x} \to \infty$. Daqui resulta que a única solução da equação, que é limitada quando $x \to \infty$, é a que se obtém da solução geral, no caso de $C = 0$:

$$y = \sin x.$$

Resolver as seguintes equações lineares e, onde for pedido, os respectivos problemas de Cauchy.

125. $y' + 2y = e^{-x}$.

126. $x^2 + xy' = y$, $y|_{x=1} = 0$.

127. $y' - 2xy = 2x\,e^{x^2}$.

128. $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

129. $y'\cos x - \sin x = 2x$, $y|_{x=0} = 0$.

130. $xy' - 2y = x^3\cos x$.

131. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos^3 x}$, $y|_{x=0} = 0$.

132. $y'\,x\ln x - y = 3x^3\ln^2 x$.

133. $(2x - y^2)\,y' = 2y$.

134. $y' + y\cos x = \cos x$, $y|_{x=0} = 1$.

135. $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$.

136. $\left(e^{-\frac{y^2}{2}} - xy\right)dy - dx = 0$.

137. $y' - ye^{x} = 2xe^{e^{x}}$.

138. $y' + xe^{x}\,y = e^{(1-x)e^{x}}$.

139. Calcular a intensidade de corrente $i(t)$, no caso de $E(t) = E_0\sin 2\pi nt$, $i(0) = I_0$, onde E_0, I_0 = const.

140. Um condensador com capacidade Q é ligado a um circuito eléctrico com diferença de potenciais igual a E e resistência R. Determinar a carga q do condensador no instante t após este ter sido ligado.

141. Um ponto de massa m está animado de movimento rectilíneo. Sobre ele actua uma força, proporcional ao tempo, com constante de proporcionalidade k_1. Além disso, o ponto está sujeito à força de resistência do meio, que é proporcional à sua velocidade, com constante de proporcionalidade k_2. Determinar a velocidade como função do tempo, sabendo que a velocidade no instante inicial é nula.

142. Determinar a equação das curvas que têm a seguinte propriedade: o comprimento do segmento, delimitado no eixo $0y$ pela tangente a qualquer ponto, é igual ao quadrado da abcissa do ponto de tangência.

143. Determinar a equação da curva, tal que o comprimento do segmento, delimitado no eixo $0y$ pela tangente a qualquer ponto, é igual a metade da soma das coordenadas do ponto de tangência.

144. Calcular a solução geral da equação não homogénea de primeira ordem $y' + p(x)\,y = q(x)$, se for conhecida uma solução particular $y_1(x)$.

145. Calcular a solução geral da equação não homogénea de primeira ordem $y' + p(x)\,y = q(x)$, se forem conhecidas duas soluções particulares $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

146. Demonstrar que toda a equação linear conserva essa propriedade após a substituição da variável independente $x = \varphi(t)$, onde $\varphi(t)$ é uma função diferenciável.

147. Demonstrar que toda a equação linear conserva essa propriedade após qualquer transformação linear da função incógnita $y = \alpha(x)\,z + \beta(x)$ onde $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ são funções diferenciáveis arbitrárias, sabendo que $\alpha(x) \neq 0$ no intervalo considerado.

Nos problemas que se seguem, calcular as soluções das equações que satisfazem as condições indicadas:

148. $y' - y\ln 2 = 2^{\sin x}(\cos x - 1)\ln 2$, y é limitado quando $x \to +\infty$.

149. $y' - y = -2e^{-x}$, $y \to 0$ quando $x \to \infty$.

150. $y'\sin x - y\cos x = -\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$, $y \to 0$ quando $x \to \infty$.

151. $x^2y'\cos\dfrac{1}{x} - y\sin\dfrac{1}{x} = -1$, $y \to 1$ quando $x \to \infty$.

152. $2xy' - y = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $y \to 1$ quando $x \to +\infty$.

153. $x^2y' + y = (x^2 + 1)\,e^{x}$, $y \to 1$ quando $x \to -\infty$.

154. $xy' + y = 2x$, $y \to 1$, y é limitado quando $x \to 0$.

155. $y'\sin x + y\cos x = 1$, $y \to 1$, y é limitado quando $x \to 0$.

156. $y'\cos x - y\sin x = -\sin 2x$, $y \to 0$, $y \to 0$ quando $x \to \pi/2$.

2.° Equação de Bernoulli.

A equação de Bernoulli tem a forma

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=q(x)\,y^n,$$

onde $n \neq 0,1$ (quando $n = 0$ ou $n = 1$ esta equação é linear).

Através da substituição de variável $z = 1/y^{n-1}$ a equação de Bernoulli pode ser reduzida a uma equação linear e resolvida como tal.

EXEMPLO 7. Resolver a equação de Bernoulli $3y' + y = 1/y^2$.

Resolução. Multipliquemos ambos os membros da equação por y^2:

$$3y^2y'+y^3=1.$$

Seja $y^3 = z$, então $3y^2y' = dz/dx$. Após a substituição, a equação toma a forma

$$\frac{dz}{dx}+z=1,$$

cuja solução geral é $z = 1 + C\,e^{-x}$.

Daqui obtém-se o integral geral da equação inicial:

$$y^3=1+C\,e^{-x}.$$

Observação. A equação de Bernoulli também pode ser integrada pelo método da variação da constante, como se fosse linear, ou através da substituição $y(x) = u(x)\,v(x)$.

EXEMPLO 8. Resolver a equação de Bernoulli

$$xy'+y=y^2\ln x. \qquad (16)$$

Resolução. Apliquemos o método da variação da constante arbitrária. A solução geral da equação homogénea associada $xy' + y = 0$ tem a forma $y = C/x$. Vamos procurar a solução geral da equação (16) sob a forma

$$y=C(x)/x, \qquad (17)$$

onde $C(x)$ é a nova função incógnita.

Substituindo a expressão (17) em (16), obtém-se

$$C'(x)=C^2(x)\,\frac{\ln x}{x^2}.$$

Obtivemos uma equação com variáveis separáveis, da qual se pode determinar a função $C(x)$. Integrando esta equação, obtém-se

$$\frac{1}{C(x)}=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C;\quad C(x)=\frac{x}{1+Cx+\ln x}.$$

Portanto, a solução geral da equação (16) é:

$$y=\frac{1}{1+Cx+\ln x}. \ ✦$$

Em muitos casos, é possível determinar uma substituição de variáveis que reduz uma dada equação não linear de primeira ordem a uma linear ou a uma equação de Bernoulli.

EXEMPLO 9. Resolver a equação $y' + \sin y + x\cos y + x = 0$.

Resolução. Escreva-se a equação dada sob a forma

$$y'+2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}+x\,2\cos^2\frac{y}{2}=0.$$

Dividindo ambos os membros da equação dada por $2\cos^2(y/2)$, obtém-se

$$\frac{y'}{2\cos^2\frac{y}{2}}+\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right)+x=0.$$

A substituição $z = \operatorname{tg}(x/2)$, $dz/dx = y'/2\cos^2(y/2)$ transforma esta equação numa linear: $dz/dx + z = -x$, cuja solução geral é $z = 1 - x + C\,e^{-x}$.

Substituindo z pela sua expressão através de y, obtém-se o integral geral da equação dada:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right)=1-x+C\,e^{-x}. \ ✦$$

Nalgumas equações a função incógnita $y(x)$ encontra-se sob o sinal de integral. Nestes casos, consegue-se, por vezes, através da derivação, transformar a equação dada numa equação diferencial.

EXEMPLO 10. **Resolver a equação**

$$x\int_0^x y(t)\,dt = (x+1)\int_0^x t\,y(t)\,dt,\quad x>0.$$

Resolução. Diferenciando ambos os membros em ordem a x, obtém-se

$$x\int_0^x y(t)\,dt + x\,y(x) = \int_0^x t\,y(t)\,dt + (x+1)\,x\,y(x),$$

ou

$$x\int_0^x y(t)\,dt = \int_0^x t\,y(t)\,dt + x^2\,y(x).$$

Diferenciando mais uma vez em ordem a x, ficamos com uma equação linear homogénea:

$$y(x) = xy(x) + x^2y'(x) + 2xy(x),$$

ou

$$x^2y'(x) + (3x-1)\,y(x) = 0.$$

Separando as variáveis e integrando, obtém-se

$$y = C\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}.$$

Como facilmente se verifica, esta solução satisfaz a equação dada.

Resolver as seguintes equações de Bernoulli:

157. $y'+2xy=2xy^2$.

158. $3xy^2y'-2y^3=x^3$.

159. $(x^3+e^y)\,y'=3x^2$.

160. $y'+2xy=2y^2e^{x^2}$.

161. $y'-2ye^x=2\sqrt{y}\,e^x$.

162. $2y'\ln x+\frac{y}{x}=y^{-1}\cos x$.

163. $2y'\sin x+y\cos x=y^3\sin^2 x$.

164. $(x^2+y^2+1)\,dy+xy\,dx=0$.

165. $y'-y\cos x=y^2\cos x$.

Resolver as seguintes equações não lineares; reduzi-las previamente a equações de lineares ou de Bernoulli, através de uma substituição de variáveis:

166. $y'-\operatorname{tg} y=e^x\frac{1}{\cos y}$.

167. $y'=y(e^x+\ln y)$.

168. $y'\cos y+\sin y=x+1$.

169. $yy'+1=(x-1)\,e$.

170. $y'+x\sin 2y=2x\,e^{-x^2}\cos^2 y$.

Recorrendo à diferenciação, resolver as seguintes equações:

171. $\int_0^x t\,y(t)\,dt = x^2y(x)$.

172. $y(x)=\int_0^x y(t)\,dt+e^x$.

173. $\int_0^x t\,y(t)\,dt = x^2+y(x)$.

174. $\int_0^x y(xt)\,dt = ny(x)$.

7. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EXACTAS. FACTOR INTEGRANTE

1.° Equações diferenciais exactas.

Uma equação diferencial do tipo

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{1}$$

diz-se uma equação diferencial exacta se o seu primeiro membro for o diferencial exacto de uma certa função $u(x, y)$, isto é, se

$$M\,dx + N\,dy \equiv du \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

TEOREMA. Para que a equação (1) seja uma equação diferencial exacta é necessário e suficiente que, para quaisquer x e y pertencentes a um certo domínio D, simplesmente conexo, se verifique a igualdade

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2}$$

Neste caso, o integral geral da equação (1) tem a forma $u(x, y) = C$ ou

$$\int_{x_0}^x M(x,y)\,dx + \int_{y_0}^y N(x_0,y)\,dy = C. \tag{3}$$

EXEMPLO 1. Resolver a equação diferencial

$$(\sin xy + xy\cos xy)\,dx + x^2\cos xy\,dy = 0.$$

Resolução. Verifiquemos que a equação dada é uma equação diferencial exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin xy + xy\cos xy) = x\cos xy + x\cos xy - x^2 y\sin xy =$$

$$= 2x\cos xy - x^2 y\sin xy,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2\cos xy) = 2x\cos xy - x^2 y\sin xy.$$

Logo,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

isto é, a condição (2) verifica-se. Deste modo, a equação (2) é uma equação diferencial exacta e

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} = \sin xy + xy\cos xy, \quad N = \frac{\partial y}{\partial y} = x^2\cos xy;$$

logo

$$u(x, y) = \int(\text{sen}\, xy + xy\cos xy)\,dx + \varphi(y),$$

onde $\varphi(y)$ é uma função, por enquanto indeterminada. Integrando obtém-se: $u(x, y) = x\sin xy + \varphi(y)$.

A derivada parcial $\partial u/\partial y$ da função $u(x, y)$ obtida deve ser igual a $x^2\cos xy$, donde se obtém que $x^2\cos xy + \varphi'(y) = x^2\cos xy$, pelo que $\varphi'(y) = 0$, donde $\varphi(y) = C$. Deste modo, temos $u(x, y) = x\sin xy + C$.

O integral geral da equação diferencial inicial é $x\sin xy = C$. ✦

Ao integrar certas equações diferenciais, os termos podem ser agrupados de tal forma que se obtêm combinações facilmente integráveis.

EXEMPLO 2. Resolver a equação diferencial

$$(x^3 + xy^2)\,dx + (x^2 y + y^3)\,dy = 0. \qquad (4)$$

Resolução. Neste caso temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy,$$

de modo que a condição (2) se verifica e, por conseguinte, a equação dada é uma diferencial exacta. Esta equação pode facilmente ser reduzida à forma $du = 0$ mediante o agrupamento dos seus termos. Com esse fim, vamos escrevê-la sob a forma

$$x^3\,dx + xy(y\,dx + x\,dy) + y^3\,dy = 0.$$

Evidentemente,

$$x^3\,dx = d\left(\frac{x^4}{4}\right), \quad xy(y\,dx + x\,dy) = xy\,d(xy) = d\left(\frac{(xy)^2}{2}\right)$$

$$y^3\,dy = d\left(\frac{y^4}{4}\right).$$

Logo, a equação (4) pode ser escrita sob a forma

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right) + d\left(\frac{(xy)^2}{2}\right) + d\left(\frac{y^4}{4}\right) = 0,$$

ou

$$d\left[\frac{x^4}{4} + \frac{(xy)^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right] = 0.$$

Por conseguinte, a igualdade $x^4 + 2(xy)^2 + y^4 = C$, dá-nos o integral geral da equação (4).

Integrar as seguintes equações diferenciais exactas:

175. $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)\,y' = 0.$ **176.** $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2 y + 4y^3)\,dy = 0.$

177. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right)dy = 0.$

179. $\left(2x + \frac{x^2+y^2}{x^2 y}\right)dx = \frac{x^2+y^2}{xy^2}\,dy.$

180. $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0.$

181. $(3x^2 - 2x - y)\,dx + (2y - x + 3y^2)\,dy = 0.$

182. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x\right)dy=0.$

183. $\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0.$

184. $\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$

185. $\frac{y+\sin x\cos^2 xy}{\cos^2 xy}dy+\left(\frac{x}{\cos^2 xy}+\sin y\right)dy=0.$

186. $\frac{2x\,dx}{y^3}+\frac{(y^2-3x^2)\,dy}{y^4}=0,\ y|_{x=1}=1.$

187. $y(x^2+y^2+a^2)\,dy+x(x^2+y^2-a^2)\,dx=0.$

188. $(3x^2y+y^3)\,dx+(x^3+3xy^2)\,dy=0.$

2.° Factor integrante.

Nalguns casos, quando a equação (1) não é diferencial exacta, é possível arranjar uma função $\mu(x, y)$ tal que, após multiplicar por ela o primeiro membro da equação, esta se torna diferencial exacta:

$$du=\mu M\,dx+\mu N\,dy.$$

Uma função μ que satisfaça esta igualdade diz-se factor integrante. Da definição do factor integrante resulta que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

ou

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu,$$

donde

$$N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Obtivemos assim uma equação diferencial parcial da qual se pode determinar o factor integrante.

Vamos destacar a seguir alguns casos em que é relativamente fácil resolver a equação (5), isto é, determinar o factor integrante.

1. Se $\mu=\mu(x)$, então $\partial\mu/\partial y=0$ e a equação (5) adquire a forma

$$\frac{\partial\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \qquad (6)$$

Para que exista um factor integrante, independente de y, é necessário e suficiente que o segundo membro de (6) seja função apenas de y. Nesse caso, a função $\ln\mu$ pode ser determinada por quadratura.

EXEMPLO 3. Resolver a equação $(x+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$.

Resolução. Neste caso, $M=x+y^2$, $N=-2xy$. Temos

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2y+2y}{-2xy}=-\frac{2}{x};$$

logo,

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=-\frac{2}{x},\quad \ln\mu=-2\ln|x|,\quad \mu=\frac{1}{x^2}.$$

A equação

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx-2\frac{xy}{x^2}dy=0$$

é diferencial exacta. O seu primeiro membro pode ser representado sob a forma

$$\frac{dx}{x}-\frac{2xy\,dy-y^2\,dx}{x^2}=0,\ \text{donde}\ d\left(\ln|x|-\frac{y^2}{x}\right)=0,$$

pelo que o integral geral da equação dada é

$$x=Ce^{y^2/x}.\ ✦$$

2. Analogamente, se $(\partial N/\partial x-\partial M/\partial y)\,1/M$ for função apenas de y, então a equação (1) tem como factor integrante $\mu=\mu(y)$ que depende apenas de y.

EXEMPLO 4. **Resolver a equação** $2xy\ln y\,dx+\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy=0$.

Resolução. Neste caso, $M=2xy\ln y$, $N=x^2+y^2\sqrt{y^2+1}$. Temos

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{N}=\frac{2x-2x(\ln y+1)}{2xy\ln y}=-\frac{1}{y};$$

logo,

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=-\frac{1}{y},\quad \mu=\frac{1}{y}.$$

A equação

$$\frac{2xy\ln y}{y}dx+\frac{x^2+y^2\sqrt{y^2+1}}{y}dy=0$$

é diferencial exacta e pode ser escrita sob a forma $d(x^2\ln y)+y\sqrt{y^2+1}\,dy=0$. Daqui obtém-se

$$x^2\ln y+\tfrac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}}=C.$$

EXEMPLO 5. **Resolver a equação** $(3x+2y+y^2)\,dx+(x+4xy+5y^2)\,dy=0$, **sabendo que ela tem um factor integrante com a forma** $\varphi(x+y)$.

Resolução. Seja $z=x+y^2$, então $\mu=\varphi(z)$ e, por conseguinte,

$$\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{d\ln\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\ln\mu}{\partial z},\quad \frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{d\ln\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial\ln\mu}{\partial z}\cdot 2y.$$

A equação (5) donde se determina o factor integrante vai ter a forma

$$(N-2My)\frac{d\ln\mu}{dz}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x},\ \text{ou}\ \frac{d\ln\mu}{dz}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N-2My}.$$

Uma vez que $M=3x+2y+y^2$, $N=x+4xy+5y^2$, obtém-se

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N-2My}=\frac{1}{x+y^2}=\frac{1}{z},$$

pelo que $\frac{d\ln\mu}{dz}=\frac{1}{z}$, donde $\mu=z$, i.e., $\mu=x+y^2$.

Multiplicando a equação dada por $\mu=x+y^2$, obtém-se

$$(3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4)\,dx+(x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3+5y^4)\,dy=0.$$

Esta última equação é diferencial exacta e, de acordo com (3), o seu integral geral é

$$\int_{x_0}^{x}(3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4)\,dx+\int_{y_0}^{y}(x_0^2+4x_0^2y+6x_0y^2+4x_0y^3+5y^4)\,dy=C,$$

ou

$$x^3+x^2y+2x^2y^2+2xy^3+xy^4+y^5=\tilde{C},$$

onde

$$\tilde{C}=C+x_0^2y_0+2x_0^2y_0^2+2x_0y_0^3+x_0y_0^4+y_0^5+x_0^3.$$

Depois de algumas simples transformações, obtém-se:

$$(x+y)(x+y^2)^2=\tilde{C}.$$

Integrar as seguintes equações:

189. $(1-x^2y)\,dx+x^2(y-x)\,dy=0$, $\mu=\varphi(x)$.

190. $(x^2+y)\,dx+x\,dy=0$, $\mu=\varphi(x)$.

191. $(x+y^2)\,dx+2xy\,dy=0$, $\mu=\varphi(x)$.

192. $(2x^2y+2y+5)\,dx+(2x^3+2x)\,dy=0$, $\mu=\varphi(x)$.

193. $(x^4\ln x-2xy^3)\,dx+3x^2y^2\,dy=0$, $\mu=\varphi(x)$.

194. $(x+\sin x+\sin y)\,dx+\cos y\,dy=0$, $\mu=\varphi(x)$.

195. $(2xy^2-3y^3)\,dx+(7-3xy^2)\,dy=0$, $\mu=\varphi(x)$.

196. $(3y^2-x)\,dx+(2y^3-6xy)\,dy=0$, $\mu=\varphi(x+y^2)$.

197. $(x^2+y^2+1)\,dx-2xy\,dy=0$, $\mu=\varphi(y^2-x^2)$.

198. $x\,dx+y\,dy+x(x\,dy-y\,dx)=0$, $\mu=\varphi(x^2+y^2)$.

8. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM, NÃO RESOLVIDAS EM ORDEM À DERIVADA

1.° Equações de primeira ordem de grau n em relação a y'.

Consideremos a equação diferencial

$$(y')^n + p_1(x, y)(y')^{n-1} + \dots + p_{n-1}(x, y)\, y' + p_n(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Resolva-se esta equação em ordem a y'. Sejam

$$y' = f_1(x, y),\; y' = f_2(x, y),\; \dots,\; y' = f_k(x, y) \qquad (k \le n)$$

as soluções reais da equação (1).

Então o integral geral da equação (1) pode ser expresso através de um conjunto de integrais:

$$\phi_1 = (x, y, C) = 0,\; \phi_2 = (x, y, C) = 0,\; \dots,\; \phi_k = (x, y, C) = 0,$$

onde $\phi_i(x, y, C) = 0$ é o integral da equação $y' = f_i(x, y)$ $(i = 1, \dots, k)$. Deste modo, por cada ponto do domínio, onde y' toma valores reais, passam k linhas integrais.

EXEMPLO 1. Resolver a equação $y\, y'^2 + (x - y)\, y' - x = 0$.

Resolução. Resolvendo esta equação em ordem a y', obtém-se

$$y' = \frac{y - x \pm \sqrt{(x-y)^2 + 4xy}}{2y};\; y' = 1,\; y' = -\frac{x}{y}.$$

Logo, o integral geral desta equação é

$$y = x + C,\; y^2 + x^2 = C.$$

EXEMPLO 2. Resolver a equação $2y'^2 - 2xy' - 2y + x^2 = 0$.

Resolução. Começamos por resolver a equação em ordem a y:

$$y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}.$$

Seja $y' = p$, onde p é um parâmetro; então obtém-se

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}. \qquad (2)$$

Diferenciando (2), obtém-se

$$dy = 2p\, dp - p\, dx - x\, dp + x\, dx.$$

Mas, uma vez que $dy = p\, dx$, temos

$$p\, dx = 2p\, dp - p\, dx - x\, dp + x\, dx$$

ou

$$2p\, dp - 2p\, dx - x\, dp + x\, dx = 0,$$

donde

$$2p(dp - dx) - x(dp - dx) = 0,\; (2p - x)(dp - dx) = 0.$$

Há dois casos a considerar:

1) $dp - dx = 0$. Neste caso, $p = x + C$, onde C é uma constante arbitrária. Substituindo o valor de p em (2), obtém-se a solução geral da equação dada:

$$y = Cx + C^2 + x^2/2. \qquad (3)$$

Note-se que não se pode substituir p por y' na igualdade $p = x + C$, e integrar depois a equação $y' = x + C$, visto que isso nos conduziria a uma expressão com duas constantes arbitrárias, o que não é possível no caso de uma equação diferencial de primeira ordem.

2) $2p - x = 0$, donde $p = x/2$. Substituindo esta igualdade em (2), obtemos mais uma solução:

$$y = x^2/4. \qquad (4)$$

Verifiquemos que a propriedade da unicidade de solução não é satisfeita em nenhum ponto da solução (4), ou seja, que esta solução é singular. Com este fim, consideremos na curva integral um ponto arbitrário $M_0(x_0, y_0)$, onde $y_0 = x_0^2/4$. Vamos agora procurar uma solução que esteja incluída na solução geral (3) e cujo gráfico passe pelo ponto $M_0(x_0, x_0^2/4)$. Substituindo as coordenadas deste ponto na solução geral (3), obtém-se

$$\frac{x_0^2}{4} = C x_0 + C^2 + \frac{x_0^2}{2},\text{ ou } \left(C + \frac{x_0^2}{2}\right)^2 = 0,$$

donde $C = -x_0/2$. Substitua-se este valor da constante C em (3). Então obtém-se a solução particular

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0 x}{2} + \frac{x_0^2}{4}, \qquad (5)$$

que não coincide com a solução (4). Nas soluções (4) e (5) verifica-se, respectivamente, $y' = x/2$ e $y' = x - x_0/2$. No caso de $x = x_0$, as duas derivadas coincidem. Por conseguinte, no ponto M_0 não é satisfeita a propriedade da unicidade de solução, ou seja, por este ponto passam duas curvas integrais com a mesma tangente. Uma vez que x_0 é arbitrário, a unicidade não se verifica em nenhum ponto da solução (4), o que significa que esta solução é singular.

Integrar as seguintes equações:

199. $4y'^2 - 9x = 0$.

200. $y'^2 - 2yy' = y^2(e^{2x} - 1)$.

201. $y'^2 - 2xy' - 8x^2 0$.

202. $x^2 y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.

203. $y'^2 - (2x+y)\,y' + x^2 + xy = 0$.

204. $y'^3 + (x+2)\,e^y = 0$.

205. $y'^3 - yy' - x^2 y' + x^2 y = 0$.

206. $y'^2 - yy' + e^x = 0$.

207. $y'^2 + -4xy' + 2y + 2x^2 = 0$.

2.° Equações do tipo $f(y, y') = 0$ ou $f(x, y') = 0$.

Se uma equação do tipo $f(y, y') = 0$ ou $f(x, y') = 0$ puder ser resolvida em ordem a y', então, depois de resolvida, obtém-se uma equação com variáveis separáveis.

Consideremos os casos em que uma equação desta forma não pode ser resolvida em ordem a y'.

A. Suponhamos que a equação $f(y, y') = 0$ pode ser resolvida em ordem a y:

$$y = \varphi(y').$$

Seja $y' = p$, então $y = \varphi(p)$. Diferenciando esta equação e substituindo dy por y dx, obtém-se

$$p\,dx = \varphi'(p)\,dp,$$

donde resulta

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + C, \quad y = \varphi(p). \qquad (6)$$

EXEMPLO 3. Resolver a equação $y = a(dy/dx)^2 + b(dy/dx)^3$ (a e b são constantes).

Resolução. Seja $dy/dx = p$, então $y = ap^2 + bp^3$, $dy = 2ap\,dp + 3bp^2\,dp$, ou $p\,dx = 2ap\,dp + 3bp^2\,dp$. Daqui obtém-se $dx = 2a\,dp + 3bp\,dp$ e $x = 2ap + {}^3\!/_2 bp^2 + C$. A solução geral é dada pelas equações

$$x = 2ap + {}^3\!/_2 bp^2 + C, \quad y = ap^2 + bp^3.$$

B. Suponhamos que uma equação do tipo $f(y, y') = 0$ é impossível ou difícil de resolver, tanto em relação a y, como em relação a y', mas é fácil exprimir y e y' em função de um certo parâmetro t:

$$y = \varphi(t), \quad p = \psi(t) \qquad (p = \frac{dy}{dx}).$$

Neste caso, agimos da seguinte maneira. Temos $dy = p\,dx = \psi(t)\,dx$. Por outro lado, $dy = p\,dx = \psi(t)\,dx$. Por outro lado, $dy = \varphi'(t)\,dt$ e $dx = \varphi'(t)/\psi(t)\,dt$; daqui obtém-se

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt.$$

Deste modo, obtém-se a solução geral da equação diferencial dada na forma paramétrica:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C, \quad y = \varphi(t).$$

EXEMPLO 4. Resolver a equação $y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1$.

Resolução. Seja $y = \cos^3 t$, $y' = p = \sin^3 t$,

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{-3\cos^2 t \sin dt}{\sin^3 t} = -3\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt.$$

Daqui obtém-se

$$x = \int \left(3 - \frac{3}{\sin^2 t}\right) dt = 3t + 3\operatorname{ctg} t + C;$$

a solução geral é

$$x = 3t + 3\operatorname{ctg} t + C; \quad y = \cos^3 t.$$

C. Suponhamos que a função $f(x, y') = 0$ se pode resolver em ordem a x:

$$x = \varphi(y').$$

Considerando $y' = p$, obtém-se $dx = \varphi'(p)\,dp$. Mas $dx = dy/p$ e, por conseguinte, $dy/p = \varphi'(p)\,dp$, de modo que

$$dy = p\varphi'(p)\,dp \quad e \quad y = \int p\varphi'(p)\,dp + C.$$

Deste modo, obtém-se

$$x = \varphi(p), \quad y = \int \varphi'(p)\,p\,dp + C,$$

o que nos dá a solução geral da equação na forma paramétrica (com o parâmetro p).

Observação. Nas fórmulas (6) e (7), não se pode considerar p como uma derivada, mas simplesmente como um parâmetro.

EXEMPLO 5. **Resolver a equação** $a\frac{dy}{dx} + b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x.$

Resolução. Seja $dy/dx = p$; então

$$x = ap + bp^2, \quad dx = a\,dp + 2bp\,dp, \; dy = p\,dx = ap\,dp + 2bp^2\,dp, \quad y = \frac{a}{2}p^2 + \tfrac{2}{3}bp^3 + C.$$

Logo, a solução geral é

$$x = ap + bp^2, \quad y = \frac{a}{2}p^2 + \tfrac{2}{3}bp^3 + C.$$

Tal como fizemos no caso B, podemos tentar resolver a equação $f(x,y') = 0$ através da introdução do parâmetro t.

Integre as seguintes equações diferenciais:

208. $y = y'^2 e^{y'}$.

209. $y' = e^{y'/y}$.

210. $y = \ln y' + \sin y'$.

211. $x = y'^2 - 2y' + 2$.

212. $y = y' \ln y'$.

213. $y = (y' - 1)e^{y'}$.

214. $y'^2 x = e^{1/y'}$.

215. $x(1 + y'^2)^{3/2} = a$.

216. $y^{2/5} + y'^{2/5} = a^{2/5}$.

217. $x = y' + \sin y'$.

218. $y = y'(1 + y' \cos y')$.

219. $y = \arcsin y' + \ln(1 + y'^2)$.

3.° Equações de Lagrange e Clairaut.

A equação de Lagrange tem a forma $y = x\varphi(y') + \psi(y')$.

Considerando $y' = p$, **diferenciando em ordem a** x **e substituindo** dy **por** $p\,dx$, **reduz-se esta equação a uma linear em ordem a** x, **como função de** p. **Tendo encontrado a solução geral desta última** equação $x = r(p, C)$, obtém-se a solução geral na forma paramétrica:

$$x = r(p, C), \quad y = r(p, C)\,\varphi(p) + \psi(p) \quad (p \text{ é um parâmetro}).$$

Além disso, a equação de Lagrange pode ter também soluções singulares do tipo $y = \varphi(c)\,x + \psi(c)$, **onde** c **é uma raiz da equação** $c = \varphi(c)$.

EXEMPLO 6. Integrar a equação $y = 2xy' + \ln y'$.

Resolução. **Seja** $y' = p$, **então** $y = 2xp + \ln p$. **Diferenciando, obtém-se**

$$p\,dx = 2p\,dx + 2x\,dp + \frac{dp}{p},$$

donde resulta

$$p\frac{dx}{dp} = -2x - \frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - \frac{1}{p^2}.$$

Obtivemos assim uma equação de primeira ordem, linear em ordem a x. Resolvendo-a, obtém-se

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}.$$

Substituindo o valor de x obtido na expressão de y, tem-se finalmente

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}, \quad y = \ln p + \frac{2C}{p} - 2. \; ◆$$

A equação de Clairaut tem a forma

$$y = xy' + \psi(y').$$

O método de resolução é o mesmo que se aplica à equação de Lagrange. A solução geral da equação de Clairaut tem a forma

$$y = Cx + \psi(C).$$

A equação de Clairaut pode ter ainda uma solução singular, que se obtém excluindo p das equações $y = xp + \psi(p)$, $x + \psi'(p) = 0$.

EXEMPLO 7. Integrar a equação $y = xy' + a/2y'$, onde a = const.

Resolução. Considerando $y' = p$, obtém-se

$$y = xp + \frac{a}{2p}.$$

Diferenciando esta última equação e substituindo dy por $p\,dx$, obtém-se

$$p\,dx = p\,dx + x\,dp - \frac{a}{2p^2}\,dp,$$

donde resulta

$$dx\left(x - \frac{a}{2p^2}\right) = 0.$$

Igualando a zero o primeiro factor, obtém-se $dp = 0$, donde $p = C$ e a solução geral da equação inicial é $y = Cx + a/2C$, que corresponde a uma família uniparamétrica de rectas. Igualando a zero o segundo factor, obtém-se

$$x = \frac{a}{2p^2}.$$

Excluindo p desta equação e de $y = xp + a/2p$, obtém-se $y^2 = 2ax$, que também é uma solução da equação considerada (solução singular).

Do ponto de vista geométrico, a curva $y^2 = 2ax$ é a envolvente da família de rectas, correspondentes à solução geral (Fig. 14).

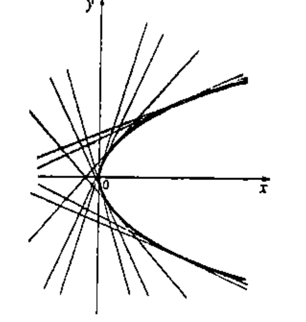


Fig. 14

Integrar as seguintes equações:

220. $y = 2xy' + \ln y'$.

221. $y = x(1 + y') + y'^2$.

222. $y = 2xy' + \sin y'$.

223. $y = xy'^2 - \frac{1}{y'}$.

224. $y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$.

225. $y = xy' + \frac{a}{y'^2}$.

226. $y = xy' + y'^2$.

227. $xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0$.

228. $y = xy' + a\sqrt{1 + y'^2}$.

229. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$.

230. Determinar a equação da curva tal que a tangente a cada ponto dela forma com os eixos das coordenadas um triângulo de área constante $S = 2a^2$.

231. Determinar a equação da curva tal que o segmento da tangente, situado entre os eixos das coordenadas, tem o comprimento constante a.

9. EQUAÇÃO DE RICCATI

Uma equação diferencial de primeira ordem com a forma

$$\frac{dy}{dx} + a(x)\,y^2 + b(x)\,y + c(x) = 0, \qquad (1)$$

onde $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ são funções conhecidas, chama-se equação de Riccati (generalizada). Se os coeficientes a, b, c da equação de Riccati forem constantes, então a equação tem as variáveis separáveis e o integral geral obtém-se imediatamente:

$$C_1 - x = \int \frac{dy}{ay^2 + by + c}.$$

Como demonstrou Liouville, a equação (1), no caso geral, não pode ser integrada através de quadraturas.

Propriedades da equação de Riccati.

1.° Se for conhecida uma solução particular qualquer $y(x)$ da equação (1), a sua solução geral pode ser obtida através de quadraturas.

Na realidade, consideremos

$$y = y_1(x) + z(x), \tag{2}$$

onde $z(x)$ é uma nova função incógnita. Substituindo (2) em (1), obtém-se

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} + a(x)\,(y_1^2 + 2y_1 z + z^2) + b(x)\,(y_1 + z) + c(x) = 0;$$

donde, atendendo a que $y_1(x)$ é uma solução de 1, se obtém

$$\frac{dz}{dx} + a(x)\,(2y_1\, z + z) + b(x)\, z = 0,$$

ou

$$\frac{dz}{dx} + a(x)\, z + \left[2a(x)\, y_1 + b(x)\right] z = 0.$$

A equação (3) é um caso particular da equação de Bernoulli.

EXEMPLO 1. Resolver a equação de Riccati

$$y' - y^2 + 2e^x\, y = e^{2x} + e^x, \tag{4}$$

sabendo que ela tem a solução particular $y_1 = e^x$.

Resolução. Se introduzirmos na equação (4) a substituição $y = e^x + z$, obtemos $dz/dx = z^2$, donde resulta

$$-\frac{1}{z} = x - C, \text{ ou } z = \frac{1}{C - x}.$$

Deste modo, a solução geral da equação (4) é

$$y = e^x + \frac{1}{C - x}.$$

Observação. Na prática, em vez da substituição (2), toma-se frequentemente mais vantajoso utilizar a substituição

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)},$$

a qual transforma imediatamente a equação de Riccati (1) numa equação linear: $u' - (2ay_1 + b)\, u = a$.

2.º Se forem conhecidas duas soluções particulares da equação (1), o seu integral geral pode ser obtido através de uma só quadratura.

Sejam conhecidas duas soluções particulares $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da equação (1). Entrando em consideração com a identidade

$$\frac{dy_1}{dx} = -a(x)\, y - b(x)\, y^2 - c(x),$$

representemos a equação (1) sob a forma

$$\frac{1}{y - y_1}\,\frac{d(y - y_1)}{dx} = -a(x)\,(y + y_1) - b(x)$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(y - y_1)\right] = -a(x)\,(y + y_1) - b(x). \tag{5}$$

Analogamente, para a segunda solução particular $y_2(x)$, temos

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(y - y_2)\right] = -a(x)\,(y + y_2) - b(x). \tag{6}$$

Subtraindo a igualdade (6) à (5), obtém-se

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{y - y_1}{y - y_2} = a(x)\,(y_2 + y_1).$$

Logo,

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = C\, e^{\int a(x)\left[y_2(x) - y_1(x)\right] dx}. \tag{7}$$

EXEMPLO 2. A equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m^2}{x^4} - y^2, \quad m = \text{const.}$$

tem as soluções particulares

$$y_1 = \frac{1}{x} + \frac{m}{x^2}, \quad y_2 = \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2},$$

Resolução. Utilizando a fórmula (7), obtém-se o integral geral da equação inicial:

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=C\,e^{\int\frac{2m}{x^2}dx}, \text{ donde } \frac{x^2y-x-m}{x^2y-x+m}=C\,e^{\frac{2m}{x}}.$$

Integrar as seguintes equações de Ricatti, sendo dadas as suas soluções particulares:

232. $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x},\ y_1=e^x.$

233. $y'+y^2-2y\sin x+\sin^2 x-\cos x=0,\ y_1=\sin x.$

234. $xy'=y^2+(2x+1)\,y=x^2+2x,\ y_1=x.$

235. $x^2y'=x^2y^2+xy+1,\ y_1=-1/x.$

236. Determinar o integral geral da equação de Riccati, sabendo que a razão entre os seus coeficientes não depende de x, isto é, $a(x):b(x):c(x)=\mathrm{m}:\mathrm{n}:\mathrm{p}$ (m, n e p são constantes).

237. Demonstrar que a equação de Riccati conserva a sua forma no caso de qualquer transformação da variável independente $x=\varphi(t)$, onde $\varphi(t)$ é qualquer função continuamente diferenciável, definida no intervalo (t_0,t_1), é tal que $\varphi'(t)\neq 0$ em (t_0,t_1).

10. DEDUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE FAMÍLIAS DE LINHAS. PROBLEMAS DE TRAJECTÓRIAS

1.º Dedução de equações diferenciais de famílias de linhas.

Seja dada a equação de uma família uniparamétrica de linhas planas

$$y=\varphi(x,a) \qquad (a \text{ é um parâmetro}). \qquad (1)$$

Diferenciando (1) em ordem a x, obtém-se

$$y'=\varphi'_x(x,a). \qquad (2)$$

Excluindo o parâmetro a de (1) e (2), obtém-se a equação diferencial

$$F(x,y,y')=0, \qquad (3)$$

que exprime uma propriedade, comum a todas as linhas da família (1). A equação (3) vai ser a equação diferencial pretendida da família (1).

Se uma família uniparamétrica de linhas for definida por uma equação do tipo

$$\varphi(x,y,a)=0,$$

então é possível obter a equação diferencial desta família, excluindo o parâmetro a do sistema de equações

$$\begin{cases}\varphi(x,y,a)=0.\\[4pt] \dfrac{\partial\phi}{\partial x}+\dfrac{\partial\phi}{\partial y}y'=0.\end{cases}$$

Suponhamos agora que é conhecida a relação

$$\varphi(x,y,a_1,a,\dots,a_n)=0, \qquad (4)$$

onde $a_1,a_2,\dots,a_n$ são parâmetros. Diferenciando (4) n vezes em ordem a x, e excluindo os parâmetros $a_1,a_2,\dots,a_n$ de (4) e das equações obtidas, chegamos a uma equação do seguinte tipo:

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0. \qquad (5)$$

Esta é a equação diferencial da família n-paramétrica de linhas considerada, no sentido em que a expressão (4) é o integral geral da equação (5).

EXEMPLO 1. Determinar a equação diferencial da família de hipérboles $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{1}=1.$

Resolução. Diferenciando esta equação em ordem a x, obtém-se

$$\frac{2x}{a^2}-2yy'=0, \text{ ou } \frac{x}{a^2}=yy'.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por x, obtém-se $\frac{x^2}{a^2}=xy'$. Substituindo na equação da família de hipérboles, resulta $xyy'-y^2=1$.

EXEMPLO 2. Deduzir a equação diferencial da família de linhas $y=a(1-e^{-\frac{x}{a}})$, onde a é um parâmetro.

Resolução. Diferenciando ambos os membros em ordem a x, obtém-se $y'=e^{-\frac{x}{a}}$. Da expressão de y' obtém-se $a=\frac{x}{\ln y'}$ e, substituindo esta expressão de a na equação da família de linhas

$$y=-\frac{x}{\ln y'}(1-y'), \text{ ou } y\ln y'+x(1-y')=0.$$

EXEMPLO 3. Deduzir a equação diferencial da família de rectas cuja distância à origem das coordenadas é igual a 1.

Resolução. Vamos basear-nos na equação normal da recta:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - 1 = 0, \qquad (6)$$

onde α é um parâmetro.

Diferenciando (6) em ordem a x, obtém-se $\cos \alpha + y' \sin \alpha = 0$, donde resulta $y' = -\text{ctg}\ \alpha$ e, por conseguinte,

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \cos \alpha = -\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Substituindo $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ em (6), obtém-se

$$\frac{-xy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} - 1 = 0, \text{ ou } y = xy' + \sqrt{1+y'^2}.$$

Deduzir as equações diferenciais das seguintes famílias de linhas:

238. $y = a/x$.

239. $x^2 - y^2 = ax$.

240. $y = a e^{x/a}$.

241. $y = Cx - C - C^2$.

242. $y = e^x (ax + b)$.

243. $y^2 = 2Cx + C^2$.

244. $y = ax^2 + bx + c$.

245. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3$.

246. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$.

247. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

246. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$.

2.° Problemas de trajectórias.

Consideremos a família de linhas planas

$$\varphi(x, y, a) = 0, \qquad (7)$$

dependente de um único parâmetro a.

Chama-se trajectória isogonal desta família a uma curva tal que, em cada ponto, forma um ângulo constante α com a linha da família dada que passa por esse ponto. Em particular, se $\alpha = \pi/2$, a trajectória diz-se ortogonal.

Dada uma família da forma (7), vamos procurar as suas trajectórias isogonais.

A. Trajectórias ortogonais.

Começamos por deduzir a equação diferencial da família de linhas dada. Suponhamos que esta equação tem a forma

$$F(x, y, y') = 0.$$

Então a equação diferencial das trajectórias ortogonais tem a forma

$$F(x, y, -1/y') = 0.$$

O integral geral desta equação

$$\varphi(x, y, C) = 0$$

dá-nos a família das trajectórias ortogonais.

Suponhamos agora que a equação da família de linhas é dada em coordenadas polares:

$$\varphi(\rho, \varphi, a) = 0, \qquad (8)$$

onde a é um parâmetro. Excluindo o parâmetro a de (8) e da equação $\partial\phi/\partial\varphi$, obtém-se a equação diferencial da família (8): $F(\rho, \varphi, \rho') = 0$. Substituindo nela ρ' por $-\rho/\rho'$, obtém-se a equação diferencial da família de trajectórias ortogonais:

$$F\left(\phi, \varphi, -\frac{\rho^2}{\rho'}\right) = 0.$$

B. Trajectórias isogonais.

Suponhamos que as trajectórias intersectam as curvas da família dada sob um ângulo α, tal que $\text{tg}\ \alpha = k$. Neste caso, pode demonstrar-se que a equação diferencial das trajectórias isogonais tem a forma

$$F\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0.$$

EXEMPLO 4. Determinar as trajectórias ortogonais da família de linhas $y = kx$.

Resolução. A família de linhas $y = kx$ é constituída pelas rectas que passam pela origem das coordenadas. A fim de determinar a equação diferencial da família dada, diferenciemos em ordem a x ambos os membros da equação $y = kx$, o que nos dá $y' = k$. Excluindo o parâmetro k do sistema

$$\begin{cases} y = kx, \\ y' = k, \end{cases}$$

obtém-se a equação diferencial da família : $xy' = y$. Substituindo nesta equação y' por $-1/y'$, obtemos a equação diferencial das trajectórias ortogonais: $-x/y' = y$ ou $yy' + x = 0$. A equação obtida é uma equação com variáveis separáveis. Integrando-a, obtém-se a equação das trajectórias ortogonais:

$$x^2 + y^2 = C \ (C \geq 0).$$

As trajectórias ortogonais são circunferências com centro na origem das coordenadas (Fig. 15).

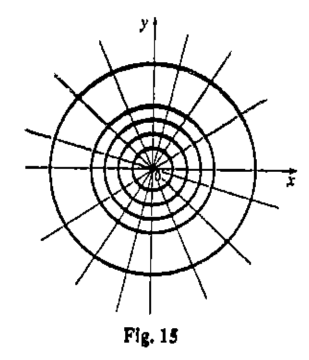


Fig. 15

EXEMPLO 5. Determinar a equação da família de linhas, ortogonais à família $x^2 + y^2 = 2ax$.

Resolução. A família de linhas dada é uma família de circunferências, cujos centros se situam no eixo $0x$ e são tangentes ao eixo $0y$.

Diferenciando em ordem a x ambos os membros da família dada, obtém-se $x + yy' = a$. Excluindo o parâmetro a das equações $x^2 + y^2 = 2ax$, $x + yy' = a$, obtém-se a equação diferencial da família dada: $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$. A equação diferencial das trajectórias ortogonais é

$$x^2 - y^2 + 2xy\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0, \text{ ou } y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Esta última equação é homogénea. Integrando-a, obtém-se $x^2 + y^2 = Cy$. As curvas integrais são circunferências, cujos centros se situam no eixo $0y$ e são tangentes ao eixo $0x$ (Fig. 16).

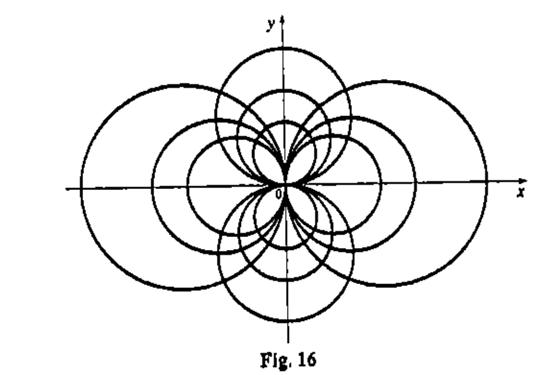


Fig. 16

EXEMPLO 6. Determinar as trajectórias ortogonais da família de parábolas $y = ax^2$.

Resolução. Comecemos por deduzir a equação diferencial da família de parábolas. Com este fim, diferenciemos ambos os membros da equação em ordem a x: $y' = 2ax$. Excluindo o parâmetro a, obtém-se a equação diferencial procurada: $y'/y = 2/x$. Substituindo nesta equação y' por $-1/y'$, obtém-se a equação diferencial das trajectórias ortogonais

$$-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x}, \text{ ou } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}.$$

Integrando, obtém-se $y^2 = -\frac{x^2}{2} + C$, ou $\frac{x^2}{2} + y^2 = C$, onde $C > 0$. A família ortogonal é uma família de elipses (Fig. 17).

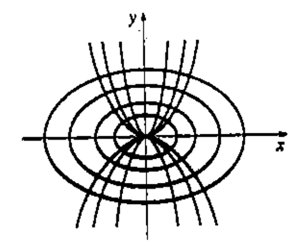


Fig. 17

EXEMPLO 7. Determinar as trajectórias ortogonais da família de lemniscatas $\rho = a \cos 2\varphi$.

Resolução. Temos

$$\rho = a \cos 2\varphi, \text{ logo } \rho\rho' = -a \sin 2\varphi.$$

Excluindo o parâmetro a, obtém-se a equação diferencial da família de curvas dada:

$$\rho' = -\rho \operatorname{tg} 2\varphi.$$

Substituindo ρ' por $-\rho/\rho'$, determina-se a equação da família de trajectórias ortogonais:

$$-\rho/\rho' = -\rho \operatorname{tg} 2\varphi,$$

donde $d\rho/\rho = \operatorname{ctg}(2\varphi)\, d\varphi$. Integrando, obtém-se a equação das trajectórias ortogonais:

$$\rho = C \sin 2\varphi.$$

As trajectórias ortogonais da família de lemniscatas são lemniscatas cujos eixos de simetria formam com o eixo polar um ângulo de 45° (Fig. 18).

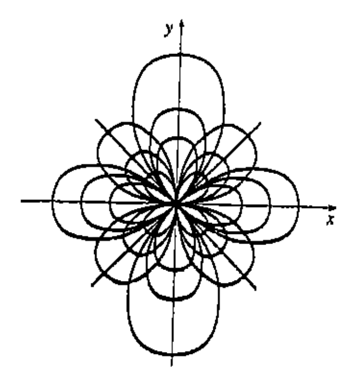


Fig. 18

Determinar as trajectórias ortogonais das seguintes famílias de curvas:

249. $y^2 + 2ax = 0, \quad a > 0.$

250. $y = ax^n, \quad a$ é um parâmet ro.

251. $y = a e^{\sigma x}, \quad a = \text{const.}$

252. $\cos y = a e^{-x}.$

253. $y = ax^n, \quad a$ é um parâme tro.

254. $x^k + y^k = a^k.$

255. $x^k + y^k = a^k.$

256. $x^2 + y^2 = 2ay.$

257. $x^2 - \frac{1}{3}y^2 = a^2.$

258. $\rho = a(1 + \cos\varphi).$

259. $y^2 = 4(x - a).$

11. SOLUÇÕES SINGULARES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

A solução $y = \varphi(x)$ da equação diferencial

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

diz-se singular se em nenhum dos seus pontos se verificar a propriedade da unicidade, isto é, se por cada ponto (x_0, y_0), além da solução considerada, passar outra solução, que tem no ponto (x_0, y_0) a mesma tangente, que a solução $y = \varphi(x)$, mas que não coincide com ela em nenhuma vizinhança de (x_0, y_0). O gráfico de uma solução singular é chamado curva integral singular da equação (1).

Se a função $F(x, y, y')$ e as suas derivadas parciais $\partial F/\partial y$ e $\partial F/\partial y'$, forem contínuas em ordem a x, y e y', então qualquer solução singular da equação (1) satisfaz também a equação

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \qquad (2)$$

Logo, para determinar as soluções singulares da equação (1), basta excluir y' das equações (1) e (2). A equação que se obtém depois da exclusão de y', com a forma

$$\Psi(x, y) = 0, \qquad (3)$$

chama-se p-discriminante da equação (1) e a curva definida pela equação (3) denomina-se curva p-discriminante (abreviadamente, C. P. D.).

É frequente a C. P. D. dividir-se em vários ramos. Nesse caso, é necessário verificar se cada ramo é solução da equação (1) e, no caso de o ser, se o princípio da unicidade é violado em cada um dos seus pontos.

EXEMPLO 1. Determinar as soluções singulares da equação diferencial

$$xy' + y'^2 - y = 0. \qquad (4)$$

Resolução. *a*) Determinemos a curva p-discriminante.

Neste caso, $F(x, y, y') \equiv xy' + y'^2 - y$ e a equação (2) toma a forma

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \equiv x + 2y' = 0.$$

logo, $y' = -x/2$. Substituindo esta expressão de y' na equação (4), obtém-se

$$y = -\frac{x^2}{4}. \qquad (5)$$

A curva (5) é a curva p-discriminante da equação (4) e tem como único ramo uma parábola.

b) Verifiquemos se a curva *p*-discriminante é solução da equação dada.

Substituindo a expressão (5) e a sua derivada em (4), verifica-se que

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

é, de facto, solução da equação (4).

c) Verifiquemos se a solução (5) é solução singular da equação (4).

Com esse fim, determinemos a solução geral da equação (4). A equação pode ser escrita sob a forma $y = xy' + y'^2$, verificando-se assim que é uma equação de Clairaut. A sua solução geral é

$$y = Cx + C^2. \tag{6}$$

As condições de tangência de duas curvas $y = y_1(x)$ e $y = y_2(x)$ no ponto de abcissa $x = x_0$ são as seguintes:

$$y_1(x_0) = y_2(x_0),\ \ y_1'(x_0) = y_2'(x_0). \tag{7}$$

A primeira igualdade exprime a coincidência das ordenadas das curvas, enquanto a segunda exprime a coincidência dos declives das tangentes a estas curvas no ponto de abcissa $x = x_0$.

Substituindo $y_1(x) = -x^2/4$ e $y_2(x) = Cx + C^2$ nas condições (7), verifica-se que estas tomam a forma

$$-\frac{x_0^2}{4} = Cx_0 + C^2,\ \ -\frac{x_0}{2} = C. \tag{8}$$

Substituindo $C = -x_0/2$ na primeira das igualdades (8), obtém-se

$$-\frac{x_0^2}{4} = -\frac{x_0^2}{2} + \frac{x_0^2}{4},\ \text{ou}\ -\frac{x_0^2}{4} = -\frac{x_0^2}{4},$$

i.e., no caso de $C = -x_0/2$, a primeira igualdade é uma condição universal, uma vez que x_0 é a abcissa de um ponto arbitrário. Assim, a curva (5) é tangente, em cada ponto, a uma outra curva da família (6), nomeadamente aquela que verifica $C = -x_0/2$. Logo, $y = -x^2/4$ é uma solução singular da equação (4).

d) Interpretação geométrica.

A solução geral da equação (4) é a família de rectas (6) e a solução singular (5) é a envolvente desta família de rectas (Fig. 19).

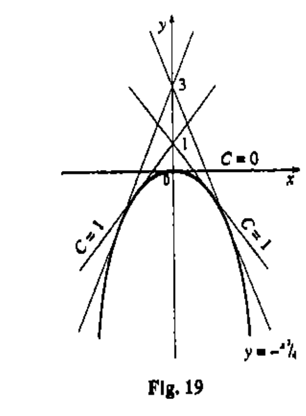


Fig. 19

Chama-se envolvente da família de curvas

$$\varphi(x, y, C) = 0 \tag{9}$$

à curva que, em cada ponto, é tangente a uma certa curva da família (9) e tal que, em cada arco, é tangente a uma infinidade de curvas da família (9) (*).

Se a expressão (9) for o integral geral da equação (1), então a sua envolvente, caso exista, é uma curva integral singular daquela equação. Efectivamente, nos pontos da envolvente, os valores de x, y e y' coincidem com os valores de x, y e y' da curva integral que é tangente à envolvente no ponto (x, y) e, por conseguinte, em cada ponto da envolvente os valores de x, y e y' satisfazem a equação $F(x, y, y') = 0$, i.e., a envolvente é uma curva integral.

Além disso, em cada ponto da envolvente o princípio da unicidade não se verifica, pelo que por esse ponto passam, pelo menos, duas curvas integrais com a mesma direcção: a própria envolvente e a curva da família (9) que lhe é tangente no ponto considerado. Logo, a envolvente é uma curva integral singular. Do curso de Análise Matemática, sabe-se que a envolvente faz parte da chamada curva *C*-discriminante (abreviadamente C. C. D.), definida pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} \phi(x, y, C) = 0, \\ \dfrac{\partial \phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases}$$

(*) Diz-se que as curvas Γ_1 e Γ_2 são tangentes no ponto M_0 se tiverem neste ponto uma tangente comum.

Um dado ramo da C. C. D. é uma envolvente se satisfizer as seguintes condições:

1) As derivadas parciais de φ existem e são limitadas em módulo:

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right| \leq M, \quad \left|\frac{\partial\phi}{\partial y}\right| \leq N, \qquad (11)$$

onde M e N são constantes;

2)
$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \neq 0, \text{ ou } \frac{\partial\phi}{\partial y} \neq 0. \qquad (12)$$

Observação. Note-se que as condições 1) e 2) são apenas suficientes, pelo que os ramos da C. C. D. onde elas não se verifiquem também podem ser envolventes.

EXEMPLO 2. Determinar as soluções singulares da equação diferencial

$$xy' - 2yy' + 4x = 0, \quad x > 0, \qquad (13)$$

conhecendo o seu integral geral:

$$x^2 = C(y - C). \qquad (14)$$

Resolução. *a*) Calculemos a curva C-discriminante. Temos:

$$\varphi(x, y, C) = C(y - C) - x^2,$$

pelo que

$$\frac{\partial\phi}{\partial C} = y - 2C,$$

donde $C = y/2$. Substituindo este valor de C em (14), obtém-se

$$x^2 = \frac{y}{2}\left(y - \frac{y}{2}\right),$$

donde

$$(y - 2x)(y + 2x) = 0, \quad \text{ou } y = \pm 2x. \qquad (15)$$

Obtivemos assim a curva C-discriminante, composta por duas rectas:

$$y = 2x \text{ e } y = -2x.$$

b) Substituindo, verifica-se imediatamente que ambos os ramos da C. C. D. são soluções da equação (13):

c) Demonstremos que ambas as soluções (15) são soluções singulares da equação (13). Efectivamente, uma vez que

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = C,$$

em cada ramo da C. C. D. verifica-se

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right| = |-2x| < 2b$$

(pressupomos que a solução $y(x)$ da equação (13) é considerada no intervalo $0 < a < x < b$),

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right| = |C| < N, \text{ onde } N = \max_{C \in G} |C|,$$

onde G é o domínio de variação de C.

Note-se que, em qualquer dos ramos da C. C. D. se verifica $\partial\phi/\partial x = -2x \neq 0$ no domínio $x > 0$, de tal modo que se verifica uma das condições (12). Logo, as condições (11) e (12) verificam-se, pelo que as rectas (15) são as envolventes das parábolas (14).

Assim, está provado que cada uma das soluções (15) é uma solução singular.

Ao determinar as soluções singulares de equações, são úteis os seguintes esquemas simbólicos:

$$\text{C. P. D.} = \text{E. R. C}^2. = 0, \qquad (16)$$

$$\text{C. C. D.} = \text{E. N}^2. \text{R}^3. = 0. \qquad (17)$$

O esquema (16) significa que a equação da curva p-discriminante pode decompor-se em três equações:

1) E = 0 — equação da envolvente;
2) R = 0 — equação do lugar geométrico dos pontos de retrocesso;
3) C = 0 — equação do lugar geométrico dos pontos de contacto das linhas integrais (este factor entra na C. P. D. com o expoente 2).

O esquema (17) significa que a equação da curva C-discriminante pode decompor-se em três equações:

1) E = 0 — equação da envolvente;
2) N = 0 — equação do lugar geométrico dos pontos nodais (este factor entra na C. C. D. com o expoente 2);
3) R = 0 — equação do lugar geométrico dos pontos de retrocesso (este factor entra na C. P. D. com o expoente 3).

Nas expressões (16) e (17) para cada problema concreto podem não figurar todas as componentes da C. P. D. ou da C. C. D.

De todos os lugares geométricos referidos, só a envolvente corresponde a uma solução singular da equação diferencial. A determinação da envolvente fica simplificada pelo facto de ela figurar nas expressões (16) e (17) com expoente 1.

Em relação aos restantes lugares geométricos (pontos de retrocesso, pontos nodais e pontos de contacto), é necessária uma análise complementar em cada caso concreto. Se um certo factor figurar na C. P. D. com o expoente 2 e não figurar na C. C. D., isso indica que ele pode representar o lugar geométrico dos pontos de contacto das linhas integrais. Analogamente, se um certo factor figurar na C. C. D. com o expoente 2 e não figurar na C. P. D., então ele pode corresponder ao lugar geométrico dos pontos nodais. Finalmente, se um certo factor figurar na C. P. D. com o expoente 1 e na C. C. D. com o expoente 3, então pode ser que ele nos indique o lugar geométrico dos pontos de retrocesso.

EXEMPLO 3. Determinar as soluções singulares da equação diferencial

$$2y(y'+2)-xy'^2=0. \qquad (18)$$

Resolução. As soluções singulares, se existirem, são definidas pelo sistema

$$\begin{cases} 2y(y'+2)-xy'^2=0, \\ 2x-2xy'=0 \end{cases} \qquad (19)$$

onde a segunda equação é obtida de (18), diferenciando-a em ordem a y'. Excluindo y', obtém-se a curva p-discriminante: $y+4\,x\,y=0$, que se decompõe em dois ramos:

$$\begin{cases} y=0, & (20) \\ y=-4x. & (21) \end{cases}$$

Através de substituição, verifica-se que estas funções são soluções de (18). A fim de verificar se as soluções (20) e (21) são de facto singulares, determinemos a envolvente da família

$$Cy-(C-x)=0, \qquad (22)$$

que constitui o integral geral de (18).

Vamos escrever o sistema do qual se determina a curva C-discriminante:

$$\begin{cases} Cy-(C-x)=0, \\ y-2(C-x)=0. \end{cases}$$

Daqui, excluindo C, obtém-se

$$y+4xy=0, \text{ ou } y=0 \text{ e } y=-4x,$$

o que coincide com (20) e (21). Uma vez que, nas linhas (20) e (21) as condições (11) e (12) se verificam, concluímos que as linhas $y=0$ e $y=-4x$ são envolventes, pelo que as funções (20) e (21) são soluções singulares da equação dada.

As curvas integrais (22) são as parábolas $y=\dfrac{(C-x)^2}{C}$; as linhas $y=0$ e $y=-4x$ são as envolventes desta família de parábolas (Fig. 20).

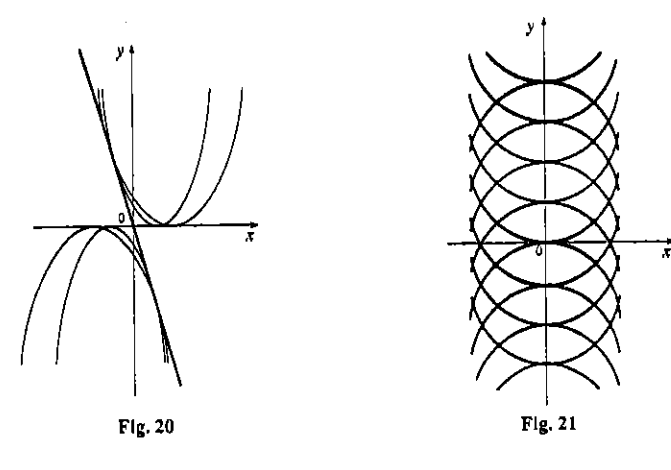


Fig. 20 Fig. 21

EXEMPLO 4. Determinar as soluções singulares da equação diferencial

$$y'^2=4x^2. \qquad (23)$$

Resolução. Diferenciemos (23) em ordem a y':

$$2y'=0. \qquad (24)$$

Excluindo y' das equações (23) e (24), obtém-se $x^2=0$. A curva p-discriminante é o eixo das ordenadas. Este não constitui uma solução da equação (23), mas, de acordo com o esquema (16), pode ser o lugar geométrico dos pontos de contacto das linhas integrais.

As soluções da equação (23) são as parábolas

$$y=x^2+C, \quad y=-x^2+C,$$

assim como as curvas suaves que se possam compor com fragmentos dessas parábolas (Fig. 21).

Pelo desenho pode ver-se que a recta $x=0$ é, de facto, o lugar geométrico dos pontos de contacto das linhas integrais da equação (23).

EXEMPLO 5. Calcular as soluções singulares da equação diferencial

$$y'^2(2-3y)^2 = 4(1-y). \qquad (25)$$

Resolução. Determinemos a C. P. D. Excluindo y' do sistema de equações

$$\begin{cases} y'^2(2-3y)^2 - 4(1-y) = 0, \\ 2y'(2-3y)^2 = 0, \end{cases}$$

obtém-se

$$(2-3y)^2(1-y) = 0. \qquad (26)$$

Reduzindo a equação (25) à forma

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2-3y}{2\sqrt{1-y}},$$

determinamos o seu integral geral

$$y^2(1-y) = (x-C)^2.$$

Calculemos a C. C. D. Excluindo C do sistema de equações

$$\begin{cases} y^2(1-y) - (x-C) = 0, \\ 2(x-C) = 0, \end{cases}$$

teremos

$$y^2(1-y) = 0. \qquad (27)$$

Assim, das equações (26) e (27), temos

$$\text{C. P. D.} \equiv (1-y)(2-3y)^2 = 0,$$
$$\text{C. C. D.} \equiv (1-y)\,y^2 = 0.$$

O factor $1-y$, que figura no p-discriminante e no C-discriminante com o expoente 1, dá-nos a envolvente; logo, a função $y = 1$ é uma solução singular da equação (25). Substituindo, verifica-se imediatamente que $y = 1$ satisfaz, de facto, a equação considerada.

A equação $2-3y=0$, que figura com o expoente 2 no p-discriminante, mas não figura no C-discriminante, dá-nos o lugar geométrico dos pontos de contacto (C^2).

Finalmente, a equação $y = 0$, que figura no C-discriminante com o expoente 2, mas não figura no p-discriminante, dá-nos o lugar dos pontos nodais (N^2) (Fig. 22).

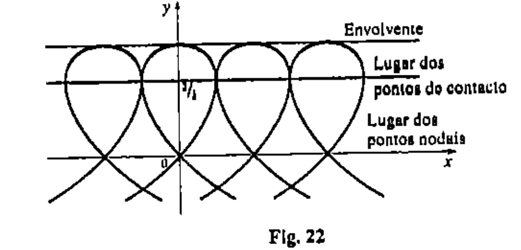


Fig. 22

EXEMPLO 6. Determinar as soluções singulares da equação

$$3y = 2xy' - \frac{2}{x}y'^2. \qquad (28)$$

Resolução. Procuremos a curva p-discriminante. Diferenciando (28) em ordem a y', obtém-se

$$0 = 2x - \frac{4}{x}y', \text{ de onde } y' = \frac{x^2}{2}. \qquad (29)$$

Substituindo (29) em (28), determina-se a equação da C. P. D.:

$$\text{C. P. D.} \equiv 6y - x^3 = 0. \qquad (30)$$

b) Procuremos o integral geral da equação (28). Representando y' por p, a equação (28) pode escrever-se sob a forma

$$3y = 2xp - \frac{2}{x}p^2. \qquad (31)$$

Diferenciando ambos os membros de (28) em ordem a x, e atendendo a que $y' = p$, teremos

$$px^2 - 2p^2 = (2x^3 - 4px)\frac{dp}{dx}, \text{ de onde } (x^2-2p)\left(p - 2x\frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

Igualando a zero o primeiro factor $x^2 - 2p = 0$, obtém-se (29), enquanto a relação $p - 2x\,dp/dx = 0$ nos dá

$$Cx = p^2. \qquad (32)$$

Excluindo o parâmetro p das equações (31) e (32), determinemos a solução geral da equação (28):

$$(3y+2C)^2 = 4C\,x^3. \qquad (33)$$

c) Determinemos a curva C-discriminante. Diferenciando (33) em ordem a C, teremos

$$2C = x^3 - 3y. \qquad (34)$$

Substituindo (34) em (33), obtém-se a equação da C. C. D.:

$$\text{C. C. D.} \equiv (6y - x^3)\,x^3 = 0.$$

De acordo com os esquemas simbólicos (16) e (17), conclui-se que $6y - x^3 = 0$ é a envolvente da família de parábolas semicúbicas (33), enquanto $x = 0$ é o lugar geométrico dos pontos de retrocesso [este factor figura na equação da C. C. D. com o expoente (3)] (Fig. 23). Substituindo na equação (28), verifica-se que $y = x^3/6$ é, de facto, uma solução desta equação, enquanto $x = 0$ não é solução [para $x = 0$, a equação (28) não faz sentido]. Portanto, a solução $y = x^3/6$ é singular (dá-nos a envolvente da família de linhas integrais).

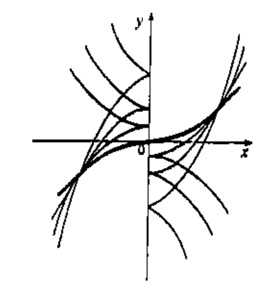


Fig. 23

Nos exemplos seguintes, determinar as soluções singulares, se estas existirem:

260. $(1+y'^2)\,y^2 - 4yy' - 4x = 0.$ **261.** $y'^2 - 4y = 0.$

262. $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0.$ **263.** $y'^2 - y^2 = 0.$

264. $y' = \sqrt[3]{y^2 + a}$. Para que valor do parâmetro a esta equação tem uma solução singular?

265. $(xy'+y)^2 + 3x^5(xy' - 2y) = 0.$ **266.** $y(y - 2xy')^2 = 2y'.$

267. $8y'^3 - 12y'^2 = 27(y - x).$ **268.** $(y'-1)^2 = y^2.$

Com base no C-discriminante, determinar as soluções singulares das seguintes equações diferenciais de primeira ordem, conhecendo os seus integrais gerais.

269. $y = y'^2 - xy' + \dfrac{x^2}{2}$, $\quad y = Cx + C^2 + \dfrac{x^2}{2}$.

270. $(xy'+y)^2 = y^2 y'$, $\quad y(C - x) = C^2$.

271. $y^2 y'^2 + y^2 = 1$, $\quad (x - C)^2 + y^2 = 1$.

272. $y'^2 - yy' + e^x = 0$, $\quad y = C\,e^x + \dfrac{1}{C}$.

273. $3xy'^2 - 6yy' + x + 2y = 0$, $\quad x^2 + C(x - 3y) + C^2 = 0$.

274. $y = xy' + \sqrt{a^2 y'^2 + b^2}$, $\quad y = Cx + \sqrt{a^2 C^2 + b^2}$.

12. PROBLEMAS DIVERSOS

Integrar as seguintes equações diferenciais:

275. $y' = (x-y)^2 + 1.$ **276.** $x \sin x \cdot y' + (\sin x - x\cos x)\,y = \sin x \cos x - x.$

277. $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = y^n \sin 2x, \; n \neq 1.$ **278.** $(x^3 - 3xy^2)\,dx + (y^3 - 3x^2 y)\,dy = 0.$

279. $(5xy - 4y^2 - 6x^2)\,dx + (y^2 - 8xy + 2{,}5x^2)\,dy = 0.$

280. $(3xy^2 - x^2)\,dx + (3x^2 y - 6y^2 - 1)\,dy = 0.$

281. $(y - xy^2 \ln x)\,dx + x\,dy = 0, \; \mu = \varphi(x \cdot y).$

282. $(2xy\,e^{x^2} - x\sin x)\,dx + e^{x^2}\,dy = 0.$ **283.** $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}.$

284. $x^2 + xy' = 3x + y'.$ **285.** $xyy' - y^2 = x^4.$

286. $\dfrac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}.$ **287.** $(2x-1)\,y' - 2y = \dfrac{1-4x}{x^2}.$

288. $(x-y+3)\,dx+(3x+y+1)\,dy=0.$

289. $y'+\cos\frac{x+y}{2}=\cos\frac{x-y}{2}.$

290. $y'(3x^2-2x)-y(6x-2)=0.$

291. $xy^2y'-y^3=\frac{1}{3}x^4.$

292. $\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0,\ y\big|_{x=1}=1.$

293. $(x^2+y^2)\,dx-xy\,dy=0.$

294. $(x-y+2)\,dx+(x-y+3)\,dy=0.$

295. $(xy^2+y)\,dx-x\,dy=0.$

296. $(x^2+y^2+2x)\,dx+2y\,dy=0.$

297. $(x-1)(y^2-y+1)\,dx=(y+1)(x^2+x+1)\,dy.$

298. $(x-2xy-y^2)\,y'+y^2=0.$

299. $y\cos x\,dx+(2y-\sin x)\,dy=0.$

300. $y'-1=e^{x+2y}.$

301. $2(x^5+2x^3y-y^2x)\,dx+(y^2+2x^2y-x^4)\,dy=0.$

302. $x^2y^ny'=2xy'-y,\ n\neq-2.$

303. $[3(x+y)+a^2)]\,y'=4(x+y)+b^2.$

304. $(x-y^2)\,dx+2xy\,dy=0.$

305. $xy'+y=y^2\ln x,\ y\big|_{x=1}=\frac{1}{2}.$

306. $\sin(\ln x)\,dx-\cos(\ln y)\,dy=0.$

307. $y'=\sqrt{\frac{9y^2-6y+2}{x^2-2x+5}}.$

308. $(5x-7y+1)\,dy+(x+y-1)\,dx=0.$

309. $(x+y+1)\,dx+(2x+2y-1)\,dy=0,\ y\big|_{x=1}=2.$

310. $y^3\,dx+2(x^2-xy^2)\,dy=0.$

311. $y'=2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

312. Demonstre que uma curva que seja simétrica, em relação à origem 0 (0, 0), a uma curva integral da equação $4x^2y'^2-y^2=xy^3$, também é uma curva integral da mesma equação.

313. Determinar as linhas integrais da equação $y'+xy'^2-y=0$ que são rectas.

314. Determinar a curva tal que a área delimitada por essa curva, pelos eixos das ordenadas e pela ordenada de qualquer ponto da mesma é igual ao cubo desta ordenada.

315. A área delimitada por uma curva, pelos eixos das coordenadas e pela ordenada de qualquer ponto da curva é igual, em número, ao comprimento do arco de curva correspondente. Determinar a equação desta curva, sabendo que ela passa pelo ponto $M(0, 1)$.

Capítulo 2

Equações Diferenciais de Ordem Superior à Primeira

13. CONCEITOS E DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS

Uma equação diferencial de ordem n tem a forma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$$

ou, caso ela seja resolvida em ordem a $y^{(n)}$,

$$y^{(n)}=f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (1)$$

O problema da determinação da solução $y=\varphi(x)$ da equação (1) que satisfaz as condições iniciais

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\quad y'\big|_{x=x_0}=y_0',\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}, \qquad (2)$$

denomina-se problema de Cauchy para a equação (1).

Teorema sobre a existência e unicidade de solução do problema de Cauchy

Suponhamos que a função $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ da equação (1) satisfaz as seguintes condições:

a) É contínua em ordem a todos os seus argumentos $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ num certo domínio D, onde estes estão definidos;

b) As derivadas parciais $\partial f/\partial y', \partial f/\partial y'', \ldots, \partial f/\partial y^{(n-1)}$, em ordem aos argumentos $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, existem e são limitadas em D.

Então, num certo intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$, existe uma única solução $y = \varphi(x)$ da equação (1) que satisfaz as condições

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\quad y'\big|_{x=x_0} = y_0',\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

onde os valores $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0', \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ pertencem ao domínio D.

Se a equação for de segunda ordem, $y'' = f(x, y, y')$, as condições iniciais têm a forma

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\quad y'\big|_{x=x_0} = y_0',$$

onde x_0, y_0 e y_0' são números dados. Neste caso, o teorema sobre a existência e unicidade de solução tem o seguinte significado geométrico: por um dado ponto $M_0(x_0, y_0)$ do plano $x0y$, passa uma única linha integral com um dado declive y_0' da tangente.

Consideremos, por exemplo, a equação $y'' = \sin y' + e^{-x^2 y}$ com as condições iniciais

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\quad y'\big|_{x=x_0} = y_0'.$$

Neste caso, $f(x, y, y') = \sin y' + e^{-x^2 y}$. Esta função está definida e é contínua para quaisquer valores de x, y e y'. As suas derivadas parciais em ordem a y e y' têm, respectivamente, as formas

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-x^2 y},\quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y',$$

sendo funções contínuas e limitadas dos seus argumentos em todo o seu domínio.

Logo, quaisquer que sejam as condições iniciais

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\quad y'\big|_{x=x_0} = y_0',$$

existe uma única solução da equação dada que satisfaz estas condições. ✦

Chama-se **solução geral** da equação diferencial de ordem n (1) ao conjunto de todas as suas soluções, dadas pela fórmula $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, que contém n constantes arbitrárias $C_1, C_2, \ldots, C_n$, tais que, para quaisquer condições iniciais do tipo (2) existem valores $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_n$ para os quais a função $y = \varphi(x, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_n)$ é a solução da equação diferencial (1) que satisfaz as condições iniciais dadas.

Qualquer solução que se obtém da solução geral, dando valores concretos as constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, chama-se solução particular da equação (1).

Uma equação do tipo $\varphi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, que define implicitamente a solução geral da equação diferencial, denomina-se integral geral da equação. Dando valores numéricos concretos às constantes arbitrárias $C_1, C_2, \ldots, C_n$, obtém-se um integral particular da equação diferencial. Chama-se **curva integral** da equação diferencial dada ao gráfico de qualquer solução ou integral particular.

EXEMPLO 1. Mostrar que $y = C_1 x + C_2$ é a solução geral da equação diferencial $y'' = 0$.

Resolução. Comecemos por verificar que a função $y = C_1 x + C_2$ satisfaz a equação dada, quaisquer que sejam os valores de C_1 e C_2. Na realidade, temos $y' = C$, $y'' = 0$.

Suponhamos agora que são dadas condições iniciais arbitrárias $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$. Mostremos que as constantes C_1 e C_2 podem ser escolhidas de tal modo que $y = C_1 x + C_2$ vai satisfazer estas condições. Temos $y = C_1 x + C_2$, $y' = C_1$. Fazendo $x = x_0$, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} y_0 = C_1 x_0 + C_2 \\ y' = C_1, \end{cases}$$

cuja única solução é $C_1 = y_0'$, $C_2 = y_0 - x_0 y_0'$. Deste modo, a função $y = y_0'(x - x_0) + y_0$ satisfaz as condições iniciais consideradas.

Geometricamente, isto significa que por um dado ponto $M_0(x_0, y_0)$ do plano $x0y$ passa uma única recta com o declive y_0' dado.

Se for dada uma só condição inicial, por exemplo, $y\big|_{x=x_0} = y_0$, fica definido um feixe de rectas com centro no ponto $M_0(x_0, y_0)$; ou seja, uma condição inicial não é suficiente para definir uma única solução.

316. A equação diferencial $y'' = 2\sqrt{y'}$ tem as duas soluções $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = x^3/3$, ambas satisfazendo as condições iniciais $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 0$. Por que é que este facto não contradiz o teorema sobre a existência e unicidade de solução do problema de Cauchy?

317. **Será possível que os gráficos de duas soluções, dadas no plano $x0y$, sejam tangentes um ao outro num certo ponto (x_0, y_0), para cada uma das seguintes equações:** *a)* $y' = x^2 + y^2$; *b)* $y'' = x^2 + y^2$ e *c)* $y''' = x^2 + y^2$?

Nos problemas seguintes, mostrar que as funções dadas são soluções das respectivas equações diferenciais:

318. $y = x(\sin x - \cos x)$, $y'' + y = 2(\cos x + \sin x)$.

319. $y = x^2 \ln x$, $xy''' = 2$.

320. $x + C = e^{-y}$, $y'' = y'^2$.

321. $\begin{cases} x = 1 + e^t, \\ y = te^t, \end{cases}$ $(x-1)y'' = 1$.

322. $\begin{cases} x = C_1 + \dfrac{t^4}{4}, \\ y = C_2 + \dfrac{t^5}{5}, \end{cases}$ $y'' y' = 1$.

Mostre que as seguintes funções são as soluções gerais das equações diferenciais correspondentes:

323. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $y'' + y = 0$. **324.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 1$, $y'' - 3y' + 2y = 2$.

Mostre que as seguintes igualdades são integrais (gerais ou particulares) das equações diferenciais indicadas:

325. $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1$, $y'' = (1 + y'^2)^{3/2}$. **326.** $y^2 = 1 + (1 - x)^2$, $y'^2 + yy'' = 1$.

14. REDUÇÃO DA ORDEM DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Indicaremos agora alguns tipos de equações cuja ordem pode ser reduzida.

I. A equação do tipo $y^{(n)} = f(x)$. Depois de integrar n vezes, obtém a solução geral:

$$y = \underbrace{\int \cdots \int}_{n} f(x)\, \underbrace{dx \cdots dx}_{n} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + C_{n-1}x + C_n.$$

II. A equação que não contém a função incógnita nem as suas derivadas, até à a ordem $k - 1$, inclusive:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

A ordem duma equação deste tipo pode ser reduzida em k unidades através da substituição $y^{(k)}(x) = p(x)$. Então a equação tomará a forma

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Desta última equação, se possível, determina-se $p = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$, e depois obtém-se y da equação $y^{(k)} = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ integrando k vezes.

III. A equação que não contém a variável independente:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

A substituição $y' = p$ permite reduzir a ordem da equação numa unidade. Neste caso, considera-se p como a nova incógnita, sendo função de y: $p = p(y)$. Todas as derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$ se exprimem através das derivadas da nova função p em ordem a y:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2, \text{ etc.}$$

Substituindo estas expressões na equação, no lugar de $y', y'', \dots, y^{(n)}$, obtém-se uma equação diferencial de ordem $n - 1$.

IV. A equação $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, homogénea em relação aos argumentos $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, i.e, tal que

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

A ordem desta equação pode ser reduzida numa unidade através da substituição $y = e^{\int z\,dx}$, onde z é uma nova função incógnita de x: $z = z(x)$.

V. A equação, expressa em diferenciais,

$$F(x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^{(n)}y) = 0,$$

onde a função F é homogénea em ordem aos seus argumentos $x, y, dy, d^2y, \dots, d^{(n)}y$, considerando que x e dx têm grau 1; $y, dy, d^2y, \dots, d^{(n)}y$, etc., têm grau m, de tal modo que dy/dx tem grau $m - 1$, d^2y/dx^2 tem grau $m - 2$, etc.

Para reduzir a ordem de uma equação deste tipo utiliza-se a substituição com $x = e^t$, $y = u\,e^{mt}$. Deste modo obtém-se uma equação diferencial com incógnita u e variável t, mas onde t não aparece explicitamente, pelo que admite a redução da ordem numa unidade (caso III).

Vejamos alguns exemplos dos diversos casos de redução da ordem duma equação diferencial.

EXEMPLO 1. Obter a solução geral da equação diferencial $y''' = \sin x + \cos x$.

Resolução. Integrando sucessivamente a equação dada, obtém-se

$$y'' = -\cos x + \sin x + C_1,$$
$$y' = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2,$$
$$y = \cos x - \sin x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

EXEMPLO 2. Encontrar a solução geral da equação $y''' = \frac{\ln x}{x^2}$ e destacar a solução que satisfaz as condições iniciais $y|_{x=1} = 0,\ y'|_{x=1} = 1,\ y''|_{x=1} = 2.$

Resolução. Integremos esta equação sucessivamente três vezes:

$$y'' = \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1$$

$$y' = -\tfrac{1}{2}\ln^2 x - \ln x + C_1 x + C_2, \qquad (1)$$

$$y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Determinemos a solução que satisfaz as condições iniciais dadas. Substituindo as condições iniciais $y|_{x=1} = 0,\ y'|_{x=1} = 1,\ y''|_{x=1} = 2$ em (1), teremos

$$\frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = 0,\ C_1 + C_2 = 1,\ -1 + C_1 = 2.$$

Daqui resulta $C_1 = 3$, $C_2 = -2$, $C_3 = 1/2$. A solução procurada é

$$y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + \tfrac{3}{2}x^2 - 2x + \tfrac{1}{2}.$$

EXEMPLO 3. Resolver a equação $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$.

Resolução. A equação dada não contém a função incógnita y nem a sua derivada, pelo que podemos fazer a substituição $y'' = p$. Depois disto, a equação tomará a forma

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}.$$

Separando as variáveis e integrando, obtém-se

$$p = \frac{e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}}{2}.$$

Substituamos p por y'':

$$y'' = \frac{e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}}{2}.$$

Integrando sucessivamente, obtém-se

$$y' = \frac{e^{x+C_1} + e^{-(x+C_1)}}{2} + C_2 \quad \text{e} \quad y = \frac{e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}}{2} + C_2 x + C_3.$$

EXEMPLO 4. Resolver a equação $xy^{V} - y^{IV} = 0$.

Resolução. Esta equação não contém a função y nem as suas derivadas até à ordem 3, inclusive. Por isso, considerando $y^{IV} = p$, obtém-se $x\frac{dp}{dx} - p = 0$, donde $p = C_1 x$, $y^{IV} = C_1 x$.

Integrando sucessivamente, obtém-se

$$y''' = C_1\frac{x^2}{2} + C_2,\quad y' = C_1\frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3,$$

$$y' = C_1\frac{x^4}{24} + \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4,$$

$$y = C_1\frac{x^5}{120} + C_2\frac{x^3}{6} + C_3\frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5.$$

ou

$$y = \overline{C}_1 x^5 + \overline{C}_2 x^3 + \overline{C}_3 x^2 + C_4 + C_5,$$

onde $\overline{C}_1 = C_1/120,\ \overline{C}_2 = C_2/6,\ \overline{C}_3 = C_3/2.$

EXEMPLO 5. Resolver a equação $y'' + y' = 2e^{-y}$.

Resolução. Esta equação não contém a variável independente x. Substituindo $y' = p$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$, obtém-se a equação de Bernoulli

$$p\frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}.$$

Através da substituição $p^2 = z$, esta última reduz-se a uma equação linear:

$$\frac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y},$$

cuja solução geral é $z = 4e^{-y} + C_1e^{-2y}$. Substituindo z por $p^2 = y'^2$, obtém-se

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1e^{-2y}}.$$

Separando as variáveis e integrando, obtém-se

$$x + C_2 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{4e^{-y} + C_1e}; \text{ logo } e^y + \tilde{C}_1 = (x + C_2)^2,$$

onde $\tilde{C}_1 = C_1/4$, o que nos dá o integral geral da equação.

EXEMPLO 6. Resolver a equação $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

Resolução. A equação dada é homogénea em relação a y, y', y''. A ordem desta equação reduz-se numa unidade por meio da substituição $y = e^{\int z\,dx}$, onde z é uma nova função incógnita de x. Temos

$$y' = z\,e^{\int z\,dx}, \quad y'' = (z' + z^2)\,e^{\int z\,dx}.$$

Substituindo as expressões de y, y' e y'' na equação, obtém-se

$$x^2(z' + z^2)\,e^{2\int z\,dx} = (e^{\int z\,dx} - xz\,e^{\int z\,dx})^2.$$

Dividindo ambos os membros por $e^{2\int z\,dx}$, obtém-se

$$x^2(z' + z^2) = (1 - xz)^2, \quad \text{ou } x^2z' + 2xz = 1.$$

Esta última equação é linear. O seu primeiro membro pode ser escrito sob a forma $(x^2z)' = 1$, donde

$$x^2z = x + c, \quad \text{ou} \quad z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Determinemos o integral

$$\int z\,dx = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}\right)dx = \ln|x| - \frac{C_1}{x} + \ln C_2.$$

A solução geral da equação dada vai ser

$$y = e^{\int z\,dx} = e^{\ln|x| - \frac{C_1}{x} + \ln C_2}, \quad \text{ou } y = C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}.$$

Além disso, a equação admite a solução trivial $y = 0$, que se obtém da geral fazendo $C_2 = 0$.

EXEMPLO 7. Resolver a equação $x^3y'' = (y - xy')^2$.

Resolução. Mostremos que esta equação é uma homogénea generalizada.

Considerando x, y, y', y'', grandezas de grau $1, m, m-1$ e $m-2$, respectivamente, e igualando os graus de todos os termos, obtém-se

$$3 + (m - 2) = 2m, \tag{2}$$

donde resulta que $m = 1$. O facto de a equação (2) ser solúvel é a condição para que a equação diferencial considerada seja homogénea generalizada.

Façamos a substituição $x = e^t$, $y = u\,e^t$. Uma vez que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{du}{dt} + u\right)e^t}{e^t} = \frac{du}{dt} + u,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt}\right)e^t}{e^t} = e^t\left(\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt}\right),$$

a equação dada, depois de divididos ambos os membros por e^{2t}, toma a forma

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}=\left(\frac{du}{dt}\right)^2.$$

Considerando $\frac{du}{dt}=p$, $\frac{d^2u}{dt^2}=p\frac{dp}{du}$, obtém-se $p\frac{dp}{du}+p=p^2$. Daqui resulta que $p=0$ ou $p\frac{dp}{du}+1=p$. Integrando a segunda destas equações, obtém-se

$$p=1+C_1e^u,\ \text{ou}\ \frac{du}{dt}=1+C_1e^u.$$

A solução geral desta equação é

$$u=\ln\frac{e^t}{C_1e^t+C_2}.$$

Regressando às variáveis x e y, obtém-se a solução geral da equação dada:

$$y=x\ln\frac{x}{C_1x+C_2}.$$

O caso $p=0$ dá-nos a solução $u=C$ ou $y=Cx$, solução particular que se obtém da geral no caso de $C_1=e^{-C}$; $C_2=0$.

Observação. Ao resolver o problema de Cauchy para equações de ordem superior à primeira, é conveniente determinar os valores das constantes C_i ao longo da resolução do problema, em vez de o fazer após a obtenção da solução geral da equação. Isto acelera a resolução do problema, além de o facto de as constantes C_i tomarem valores concretos pode simplificar significativamente a integração; no caso de se considerarem os C_i como constantes arbitrárias, a expressão torna-se muito complicada e, por vezes, impossível de integrar em funções elementares.

EXEMPLO 8. Resolver o problema de Cauchy $y''=2y^3$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=1$.

Resolução. Considerando $y'=p$, temos

$$p\frac{dp}{dy}=2y^3,$$

donde resulta

$$p^2=y^4+C_1,\ \text{ou}\ \frac{dy}{dx}=\sqrt{y^4+C_1}.$$

Separando as variáveis, obtém-se

$$x+C_2=\int(y^4+C_1)^{-\frac{1}{2}}\,dy.$$

No segundo membro da última equação temos um integral de uma potência de um binómio. Para os valores dados do expoente de y (4) e do expoente do binómio ($-1/2$), esta função não é integrável em termos de funções elementares (ver [11]).

Por conseguinte, este integral não se exprime como uma combinação finita de funções elementares. No entanto, se aplicarmos as condições iniciais, veremos que $C_1=0$, pelo que $dy/dx=y^2$, de onde, entrando em conta de novo com as condições iniciais, se obtém $y=1/(1-x)$.

EXEMPLO 9. Determinar a equação das curvas planas, para as quais o raio de curvatura é proporcional ao comprimento da normal.

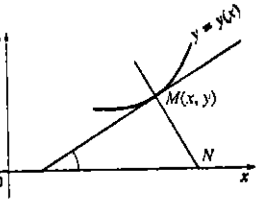


Fig. 24

Resolução. Seja $y=y(x)$ — a equação da curva procurada. O seu raio de curvatura é dado pela expressão $R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$. O comprimento da normal MN é igual a: $MN=|y|\sqrt{1+y'^2}$ (Fig. 24).

A propriedade pela qual a curva foi definida pode, portanto, ser expressa através da equação diferencial

$$\frac{1+y'^2}{y''}=ky, \tag{3}$$

onde k é o coeficiente de proporcionalidade, que tanto pode tomar valores positivos como negativos. A equação (3) pode ser rescrita sob a forma

$$\frac{2y'y''}{1+y'^2}=\frac{2y'}{ky}.$$

Integrando, obtém-se

$$\ln(1+y'^2)=\frac{2}{k}(\ln|y|+\ln C_1), \text{ ou } \frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{\frac{2}{k}}-1}.$$

Separando as variáveis e integrando mais uma vez, teremos

$$x+C_2=\int\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{\frac{2}{k}}-1}}$$

o que nos dá o integral geral da equação (3).

Analisemos alguns casos particulares:

1) $k=-1$. Neste caso temos

$$x+C_2=\int\frac{y\,dy}{\sqrt{C_1^2-y^2}},$$

e, depois de efectuada a integração,

$$x+C_2=-\sqrt{C_1^2-y^2}.$$

Daqui obtém-se $(x+C_2)^2+y^2=C_1^2$. As curvas procuradas são circunferências de raio arbitrário, com os centros no eixo $0x$.

2) $k=-2$. Neste caso chega-se à equação

$$x+C_2=\int\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}\,dy.$$

Fazendo a substituição $y=C_1/2\,(1-\cos t)$, obtém-se

$$\int\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}\,dy=\frac{C_1}{2}(t-\sin t).$$

Deste modo, verifica-se que as curvas procuradas têm as seguintes equações na forma paramétrica:

$$x+C_2=\frac{C_1}{2}(t-\sin t),\quad y=\frac{C_1}{2}(1-\cos t).$$

Trata-se de ciclóides, curvas descritas pelos pontos de circunferências de raio arbitrário, quando estas rodam ao longo do eixo $0x$.

3) $k=1$. Neste caso temos

$$c+_2=C_1\int_{C_1}^{y}\frac{dy}{\sqrt{y^2-C_1^2}}=C_1\ln\frac{y+\sqrt{y^2-C_1^2}}{C_1},$$

donde resulta

$$y+\sqrt{y^2-C_1^2}=C_1e^{\frac{x+C_2}{C_1}},\quad y-\sqrt{y^2-C_1^2}=C_1e^{-\frac{x+C_2}{C_1}}.$$

Somando as igualdades obtidas, teremos

$$y=\frac{C_1}{2}\left(e^{\frac{x+C_2}{C_1}}+e^{-\frac{x+C_2}{C_1}}\right)=C_1\operatorname{ch}\frac{x+C_2}{C_1};$$

Trata-se de linhas de cadeia.

4) $k=2$. Neste caso teremos

$$x+C_2=\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{y}{C_1}-1}},\text{ ou } x+C_2=2C_1\sqrt{\frac{y}{C_1}-1}.$$

Daqui resulta $(x+C_2)^2=4C_1(y-C_1)$ — equação que define parábolas com os eixos paralelos ao eixo $0y$.

Integrar as seguintes equações diferenciais:

327. $y^{IV}=x$.

328. $y'''=x+\cos x$.

329. $y''(x+2)^5=1;\ y(-1)=\frac{1}{12},\ y'(-1)=-\frac{1}{4}$.

330. $y'' = xe^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

331. $y'' = 2x \ln x.$

332. $xy'' = y'.$

333. $xy'' + y' = 0.$

334. $xy'' = (1 + 2x^2)\, y'.$

335. $xy'' = y' + x^2.$

336. $x \ln x \cdot y'' = y'.$

337. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}.$

338. $2y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}; \quad y(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{5}, \quad y'(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

339. $y''' = \sqrt{1 - y''^2}.$

340. $xy''' - y'' = 0.$

341. $y'' = \sqrt{1 + y'^2}.$

342. $y'' = y'^2.$

343. $y'' = \sqrt{1 - y'^2}.$

344. $y'' = 1 + y'^2.$

345. $y'' = \sqrt{1 - y'}.$

346. $y'' = y' \ln y'; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

347. $y'' + y' + 2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2.$

348. $y'' = y'(1 + y').$

349. $3y'' = (1 + y'^2)^{3/2}.$

350. $y''' = y''^2.$

351. $y''' = y'^2.$

352. $y'' = 2yy'; \quad y(0) = y'(0) = 1.$

353. $3y'y'' = 2y; \quad y(0) = y'(0) = 1.$

354. $2y'' = 3y^2; \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1.$

355. $yy'' = y'^2 = 0.$

356. $yy'' = y' + y'^2.$

357. $yy'' = 1 + y'^2.$

358. $2yy'' = 1 + y'^2.$

359. $y^3y'' = -1; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$

360. $yy'' - y'^2 = y^2y'^2.$

361. $y'' = e^{2y}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

362. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2.$

363. $y'' = 3yy'; \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 3/2.$

364. Determinar as curvas planas cujo raio de curvatura é proporcional ao cubo da normal.

365. Determinar a forma de equilíbrio de um cabo não extensível, sujeito a uma carga, sabendo que a carga exercida sobre cada unidade da projecção horizontal é constante (cabos das pontes suspensas).

366. Calcular o tempo necessário para que um objecto caia na Terra de uma altura de 400 000 Km (distância aproximada da Lua ao centro da Terra), sabendo que esta altura é calculada em relação ao centro da Terra e que o raio da Terra é aproximadamente igual a 6400 Km.

367. Deduzir a lei do movimento de um ponto material de massa m, ao longo da recta $0A$, sob a acção de uma força de repulsão, inversamente proporcional ao cubo da distância do ponto $x = 0M$ ao centro fixo 0.

368. Um corpo de massa m cai de uma certa altura à velocidade v. Durante a queda o corpo enfrenta uma resistência, proporcional ao quadrado da velocidade. Deduzir a lei do movimento do corpo em queda.

369. Determine a curva que passa pela origem das coordenadas e tal que a área do triângulo, formado pela tangente à curva num certo ponto, a ordenada desse ponto e o eixo $0x$, são proporcionais à área do trapézio curvilíneo, formado pela curva, o eixo $0x$ e a ordenada do ponto.

370. Determinar a curva cujo raio de curvatura é uma grandeza constante.

15. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDEM N

1.º Independência linear de funções. Wronskiano. Determinante de Gram.

Consideremos um sistema finito de n funções $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, definidas no intervalo (a, b). As funções $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ dizem-se linearmente dependentes no intervalo (a, b), se existirem constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, não todas nulas, tais que, para qualquer valor de x, do intervalo considerado, se verifica a igualdade

$$\alpha_1 y(x) + \alpha_2 y(x) + \cdots + \alpha_n y(x) \equiv 0.$$

Se esta igualdade só for verdadeira no caso de $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, então as funções $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ dizem-se linearmente independentes no intervalo (a, b).

EXEMPLO 1. Mostrar que o sistema de funções $1, x, x^2, x^3$ é linearmente independente no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Resolução. Efectivamente, a igualdade $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x + \alpha_4 x^3 = 0$ só é verdadeira para qualquer $x \in (-\infty, \infty)$ no caso de $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Se um, pelo menos, desse números for diferente de zero, teremos no primeiro membro da igualdade um polinómio de grau não superior a três, o qual só se pode anular em não mais de três pontos do intervalo considerado.

EXEMPLO 2. Mostrar que o sistema de funções $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$, $e^{k_3 x}$, onde k_1, k_2, k_3 são números diferentes dois a dois, é linearmente independente no intervalo $-\infty < x < \infty$.

Resolução. Suponhamos que o contrário é verdadeiro, isto é, que o sistema de funções dadas é linearmente dependente. Nesse caso, verifica-se

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \alpha_3 e^{k_3 x} \equiv 0 \tag{1}$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$, sendo que, pelo menos, um dos números α_1, α_2 ou α_3 é diferente de zero, por exemplo $\alpha_3 \neq 0$. Dividindo ambos os membros da igualdade (1) por $e^{k_1 x}$, teremos

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{(k_2 - k_1)x} + \alpha_3 e^{(k_3 - k_1)x} \equiv 0.$$

Diferenciando esta última igualdade, obtém-se

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) e^{(k_2 - k_1)x} + \alpha_3 e(k_3 - k_1) e^{(k_3 - k_1)x} \equiv 0. \tag{2}$$

Dividam-se ambos os membros da igualdade (2) por $e^{(k_2 - k_1)x}$, obtém-se

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) + \alpha_3 (k_3 - k_1) e^{(k_3 - k_2)x} \equiv 0. \tag{3}$$

Diferenciando a igualdade (3), obtém-se

$$\alpha_3 (k_3 - k_1)(k_3 - k_2) e^{(k_3 - k_2)x} \equiv 0,$$

o que é impossível, uma vez que $\alpha_3 \neq 0$, por hipótese, $k_3 \neq k_1$, $k_3 \neq k_2$, por condição, e $e^{(k_3 - k_1)x} \neq 0$.

A suposição feita de que o sistema de funções dado é linearmente dependente conduziu-nos a uma contradição, donde se conclui que este sistema de funções é linearmente independente no intervalo $(-\infty, \infty)$, i.e., a identidade (1) só se verifica se tivermos $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

EXEMPLO 3. Mostre que o sistema de funções $e^{\alpha x} \sin \beta x$, $e^{\alpha x} \cos \beta x$, onde $\beta \neq 0$, é linearmente independente no intervalo $-\infty < x < \infty$.

Resolução. Tentemos determinar os valores α_1 e α_2, para os quais se verifica a identidade

$$\alpha_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + \alpha_2 e^{\alpha x} \cos \beta x \equiv 0. \tag{4}$$

Dividamos ambos os membros por $e^{\alpha x} = 0$;

$$\alpha_1 \sin \beta x + \alpha_2 \cos \beta x \equiv 0. \tag{5}$$

Substituindo em (5) o valor $x = 0$, obtém-se $\alpha_2 = 0$, e, por conseguinte, $\alpha_1 \sin \beta x \equiv 0$. Mas, visto que a função $\sin \beta x$ não é idêntica a zero, temos $\alpha_1 = 0$. Assim, a igualdade (5) e, consequentemente, a igualdade (4) só se verificam para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, ou seja, as funções dadas são linearmente independentes no intervalo $-\infty < x < \infty$.

Observação. No decurso desta última demonstração, ficou provada também a independência linear do sistema de funções trigonométricas $\sin \beta x$, $\cos \beta x$.

EXEMPLO 4. Demonstrar que as funções

$$\sin x, \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right), \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \tag{6}$$

são linearmente dependentes no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Resolução. Demonstremos que existem números α_1, α_2, α_3 tais que no intervalo $(-\infty, \infty)$ é verdadeira a identidade

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \alpha_3 \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \equiv 0. \tag{7}$$

Suponhamos que a identidade (7) é satisfeita. Considerando, por exemplo, os pontos $x = 0$, $x = \pi/4$, $x = \pi/2$, obtemos o seguinte sistema homogéneo de equações para a determinação dos coeficientes α_1, α_2, α_3:

$$\begin{cases} \alpha_2 \sin\dfrac{\pi}{8} - \alpha_3 \sin\dfrac{\pi}{8} = 0, \\ \alpha_1 \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \alpha_2 \sin\dfrac{3\pi}{8} + \alpha_3 \sin\dfrac{\pi}{8} = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \sin\dfrac{5\pi}{8} + \alpha_3 \sin\dfrac{3\pi}{8} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Calculemos o determinante deste sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin\frac{\pi}{8} & -\sin\frac{\pi}{8} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin\frac{3\pi}{8} & \sin\frac{\pi}{8} \\ 1 & \sin\frac{5\pi}{8} & \sin\frac{3\pi}{8} \end{vmatrix} = 0.$$

Por conseguinte, o sistema homogéneo (8) tem soluções não nulas, isto é, existem números α_1, α_2, α_3 (dos quais um, pelo menos, é diferente de zero) que satisfazem o sistema (8). Para calcular uma dessas soluções, consideremos, por exemplo, as duas primeiras equações do sistema:

$$\alpha_2 \sin\frac{\pi}{8} - \alpha_3 \sin\frac{\pi}{8} = 0,$$

$$\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \alpha_2 \sin\frac{3}{8}\pi + \alpha_3 \sin\frac{\pi}{8} = 0.$$

Da primeira equação deduz-se que $\alpha_2 = \alpha_3$, da segunda resulta $\alpha_1 = -2\cos \pi/8\ \alpha_3$. Atribuindo a α_3 o valor $\alpha_3 = 1$, obtém-se uma solução não nula do sistema (8):

$$\alpha_1 = -2\cos\frac{\pi}{8}, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 1.$$

Mostremos agora que com estes valores de α_1, α_2, α_3 a igualdade (7) é satisfeita para qualquer $x \in (-\infty, \infty)$ (*).

Na realidade,

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \alpha_3 \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \equiv -2\cos\frac{\pi}{8}\sin x + 2\sin x \cos\frac{\pi}{8} \equiv 0,$$

qualquer que seja o valor de x. Por conseguinte, o sistema de funções (6) é linearmente dependente no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Observação. No caso de um sistema de duas funções pode utilizar-se um critério mais simples de dependência linear. Nomeadamente, as funções φ_1 e φ_2 são linearmente independentes no intervalo (a, b) se o seu quociente não for constante neste intervalo, i.e., se $\varphi_1(x)/\varphi_2(x) \neq$ const.; se, porém, se verificar $\varphi_1(x)/\varphi_2(x) \equiv$ const., então as funções serão linearmente dependentes.

(*) A dependência linear das funções $\sin x$, $\sin(x + \pi/8)$, $\sin(x - \pi/8)$ também pode ser provada verificando que $\sin(x + \pi/8) + \sin(x - \pi/8) = 2\cos \pi/8 \sin x$, ou seja, $\sin(x + \pi/8) + \sin(x - \pi/8) - 2\cos \pi/8 \sin x \equiv 0$.

EXEMPLO 5. As funções $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{ctg} x$ são linearmente independentes no intervalo $0 < x < \pi/2$, uma vez que o seu quociente $\operatorname{tg} x/\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^2 x \neq$ const. neste intervalo.

EXEMPLO 6. As funções $\sin 2x$ e $\sin x \cos x$ são linearmente dependentes no intervalo $-\infty < x < \infty$, uma vez que o seu quociente é constante neste intervalo: $\dfrac{\sin 2x}{\sin x \cos x} \equiv \dfrac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x} \equiv 2 \equiv$ const. (nos pontos onde o quociente considerado não está definido, definimo-lo de modo a garantir a continuidade da função).

Consideremos n funções $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$, cujas derivadas existem até à ordem $n - 1$. O determinante

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x)\cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

denomina-se wronskiano (determinante de Wronski) destas funções. De um modo geral, o wronskiano é uma função de x, definida num certo intervalo.

EXEMPLO 7. Calcular o wronskiano das funções $y_1(x) = e^{k_1 x}$, $y_2(x) = e^{k_2 x}$, $y_3(x) = e^{k_3 x}$.

Resolução. Temos

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & k_3 e^{k_3 x} \\ k_1^2 e^{k_1 x} & k_2^2 e^{k_2 x} & k_3^2 e^{k_3 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2+k_3)x}(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_3 - k_2).$$

EXEMPLO 8. Calcular o wronskiano do sistema de funções $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \sin x\ (x + \pi/8)$, $y_3(x) = \sin x\ (x - \pi/8)$.

Resolução. Neste caso, o wronskiano é

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} \sin x & \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \\ \cos x & \cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \\ -\sin x & -\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

uma vez que a primeira e a última linhas do determinante são proporcionais.

TEOREMA. Se o sistema de funções $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ for linearmente dependente no segmento $[a, b]$, então o seu wronskiano é igual a zero em todo o segmento.

Assim, por exemplo, o sistema de funções $\sin x$, $\sin(x + \pi/8)$, $\sin(x - \pi/8)$ é linearmente dependente no intervalo $(\infty, -\infty)$ e o seu wronskiano é igual a zero naquele intervalo. (Ver Exemplos 4 e 8.)

Este teorema dá-nos uma condição necessária para a dependência linear de um sistema de funções. O inverso não é verdadeiro, isto é, o wronskiano de um sistema pode ser igual a zero em todo um segmento, ainda que o sistema não seja linearmente dependente nesse segmento.

EXEMPLO 9. Consideremos as seguintes funções:

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \text{se } \frac{1}{2} < x \le 1; \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{se } \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Os respectivos gráficos estão representados na Fig. 25.

Fig. 25

Este sistema é linearmente independente, uma vez que a identidade $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0$ só se verifica no caso de $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv 0$. Efectivamente, se o analisarmos no segmento $[0, 1/2]$, obtemos $\alpha_2 y_2(x) \equiv 0$, donde $\alpha_2 = 0$, uma vez que $y_2(x) \neq 0$ neste segmento; do mesmo modo, no segmento $[1/2, 1]$ temos $\alpha_1 y_1(x) \equiv 0$, pelo que $\alpha_1 = 0$, uma vez que $y_1(x) \neq 0$ neste segmento.

Calculemos o wronskiano $W(y_1, y_2)$ deste sistema de funções. No segmento $[0, 1/2]$, temos

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} 0 & \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ 0 & 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \end{vmatrix} = 0,$$

entretanto, no segmento $[1/2, 1]$,

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & 0 \\ 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Deste modo, verifica-se $W[y_1, y_2]$ no segmento $[0, 1]$.

Consideremos o sistema de funções $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, definido num certo intervalo $[a, b]$. Defina-se

$$(y_i, y_j) = \int_a^b y_i(x)\, y_j(x)\, dx, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

O determinante

$$\Gamma(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \cdots & (y_1, y_n) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \cdots & (y_2, y_n) \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \cdots & (y_n, y_n) \end{vmatrix}$$

denomina-se determinante de Gram do sistema de funções $\{y_n(x)\}$.

TEOREMA. Para que o sistema de funções $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ seja linearmente dependente, é necessário e suficiente que o seu determinante de Gram seja igual a zero.

EXEMPLO 10. Mostre que as funções $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = 2x$ são linearmente dependentes no segmento $[0, 1]$.

Resolução. Para estas funções verifica-se

$$(y_1, y_1) = \int_0^1 x^2\, dx = \tfrac{1}{3}; \; (y_1, y_2) = (y_2, y_1) = \int_0^1 2x^2\, dx = \tfrac{2}{3}; \; (y_2, y_2) = \int_0^1 4x^2$$

$$\Gamma(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = 0,$$

logo, as funções dadas são linearmente dependentes.

Verificar se os seguintes sistemas de funções são linearmente independentes nos respectivos domínios.

371. $4, x$.

372. $1, 2, x, x^2$.

373. $x, 2x, x^2$.

374. e^x, xe^x, x^2e^x.

375. $\sin x, \cos x, \cos 2x$.

376. $1, \sin x, \cos 2x$.

377. $5, \cos^2 x, \sin^2 2x$.

378. $\cos x, \cos(x + 1), \cos(x - 2)$.

379. $1, \sin 2x, (\sin x - \cos x)^2$.

380. $x, a^{\lg_a x} (x > 0)$.

381. $\lg_a x, \lg_a x^2 (x > 0)$.

382. $1, \arcsin x, \arccos x$.

383. $5, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$.

384. $2\pi, \operatorname{arctg}\frac{x}{2n}, \operatorname{arcctg}\frac{x}{2n}$.

385. $e^{-\frac{ax^2}{2}}, e^{-\frac{ax^2}{2}}\int_0^x e^{\frac{at^2}{2}}dt$.

386. $x, x\int_{x_0}^{x}\frac{e^t}{t^2}dt\ (x_0 > 0)$.

387. Mostre que o sistema de funções

$$y_1(x), y_1(x), y_2(x), \dots, y_{n-1}(x),$$

definidas no intervalo (a, b), é linearmente dependente neste intervalo.

388. Mostre que se o sistema

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x),$$

for linearmente independente num certo intervalo (a, b), então qualquer subsistema que nele esteja contido também é linearmente independente no mesmo intervalo.

Nos problemas que se seguem, calcular o wronskiano dos seguintes sistemas de funções:

389. $1, x$.

390. $x, {}^1/_x$.

391. $1, 2, x^2$.

392. e^{-x}, xe^{-x}.

393. $e^x, 2e^x, e^{-x}$.

394. $2, \cos x, \cos 2x$.

395. $\sin x, \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

396. $\arccos\frac{x}{\pi}, \arcsin\frac{x}{\pi}$.

397. $\pi, \arcsin x, \arccos x$.

398. $4, \sin^2 x, \cos 2x$.

399. $x, \ln x$.

400. $\frac{1}{x}, e^{\frac{1}{x}}$.

401. $e^x \sin x, e^x \cos x$.

402. $e^{-3x}\sin 2x, e^{-3x}\cos 2x$.

403. $\cos x, \sin x$.

404. $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right), \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Nos problemas que se seguem, demonstrar que as funções dadas são linearmente independentes, nos intervalos indicados, apesar de os seus wronskianos serem constantes e iguais a zero nesses intervalos. Construir os gráficos das funções dadas.

405. $y_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } -1 \le x \le 0; \\ 0, & \text{se } 0 < x \le 1. \end{cases}$ $\quad y_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 \le x \le 0; \\ x^2, & \text{se } 0 < x \le 1. \end{cases}$

406. $y_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le x \le 2; \\ (x-2)^2, & \text{se } 2 < x \le 4. \end{cases}$ $\quad y_2(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & \text{se } 0 \le x \le 2; \\ x^2, & \text{se } 2 < x \le 4. \end{cases}$

407. $y_1(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } -2 \le x \le 0; \\ 0, & \text{se } 0 < x \le 1. \end{cases}$ $\quad y_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -2 \le x \le 0; \\ x^2, & \text{se } 0 < x \le 1. \end{cases}$

408. $y_1(x) = x^2,\ y_2(x) = x|x|;\ -1 \le x \le 1$.

409. Recorrendo ao determinante de Gram, mostre que os sistemas de funções dos problemas 373, 377 e 379 são linearmente dependentes no segmento $[-\pi, \pi]$.

2.° Equações lineares homogéneas com coeficientes constantes.

Consideremos a equação diferencial

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \tag{9}$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_n$ são constantes reais, $a \ne 0$.

Para determinar a solução geral da equação (9) procede-se do seguinte modo:

Começamos por escrever a equação característica da equação (9):

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_n = 0. \tag{10}$$

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ as raízes da equação (10), podendo entre elas encontrar-se raízes múltiplas. Consideremos os seguintes casos:

a) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são reais e distintas.

Nesse caso, o sistema fundamental de soluções da equação (9) tem a forma

$$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ e^{\lambda_n x}$$

e a solução geral da equação linear homogénea será

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x};$$

b) As raízes da equação característica são todas reais, mas entre elas há raízes múltiplas. Seja, por exemplo, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \tilde{\lambda}$, i.e., $\tilde{\lambda}$ é uma raiz de multiplicidade k da equação (10), sendo as restantes $n-k$ raízes todas diferentes. Neste caso, o sistema fundamental de soluções tem a forma

$$e^{\tilde{\lambda}x},\ xe^{\tilde{\lambda}x},\ x^2e^{\tilde{\lambda}x},\ldots,\ x^{k-1}e^{\tilde{\lambda}x},\ e^{\lambda_{k+1}x},\ldots,\ e^{\lambda_n x}$$

e a solução geral vai ser

$$y_n = C_1e^{\tilde{\lambda}x} + C_2e^{\tilde{\lambda}x} + C_3x^2e^{\tilde{\lambda}x} + \cdots + C_kx^{k-1}e^{\tilde{\lambda}x} + C_{k+1}x^2e^{\lambda_{k+1}x} + \cdots + C_ne^{\lambda_n x};$$

c) Algumas das raízes da equação característica são complexas. Nomeadamente, seja $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\lambda_3 = \gamma + i\delta$, $\lambda_4 = \gamma - i\delta$, sendo todas as restantes raízes reais (dado que, por hipótese, os coeficientes $a_i = 0, 1, \ldots, n$ da equação (9) são reais, as raízes complexas da equação (10) formam pares conjugados).

O sistema fundamental de soluções neste caso terá a forma

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ e^{\gamma x}\cos\delta x,\ e^{\gamma x}\sin\delta x,\ e^{\lambda_5 x},\ e^{\lambda_6 x},\ldots,\ e^{\lambda_n x}$$

e a solução geral vai ser

$$y_n = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x + C_3e^{\gamma x}\cos\delta x + C_4e^{\gamma x}\sin\delta x + C_5e^{\lambda_5 x} + \ldots + C_ne^{\lambda_n x};$$

d) No caso de $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ser uma raiz de multiplicidade k da equação (10) ($k \le n/2$), $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ é uma raiz com a mesma multiplicidade e o sistema fundamental de soluções vai ter a forma

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots$$
$$\ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,\ e^{\lambda_{2k+1}x},\ldots,\ e^{\lambda_n x},$$

pelo que a solução geral será:

$$y_n = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x + C_3xe^{\alpha x}\cos\beta x + C_4xe^{\alpha x}\sin\beta x + \cdots +$$
$$+ C_{2k-1}x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x + C_{2k}x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x + C_{2k+1}e^{\lambda_{2k+1}x} + \cdots + C_ne^{\lambda_n x}.$$

EXEMPLO 1. Determinar a solução geral da equação

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

Resolução. A equação característica, neste caso, é $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$.

Determinemos as suas raízes: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. Uma vez que são reais e distintas entre si, a solução geral tem a forma

$$y_n = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}.$$

EXEMPLO 2. Determinar a solução geral da equação

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

Resolução. A equação característica desta equação é

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0.$$

As suas raízes são $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$. Estas raízes são reais e uma delas, $\lambda = -1$, é dupla; logo a solução geral tem a forma

$$y_n = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3.$$

EXEMPLO 3. Determinar a solução geral da equação

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0.$$

Resolução. A equação característica, neste caso, é

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0,$$

cujas raízes são: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2 - 3i$, $\lambda_3 = -2 + 3i$.

Neste caso, a solução geral tem a forma

$$y = C_1 + C_2e^{-2x}\cos 3x + C_3e^{-2x}\sin 3x.$$

EXEMPLO 4. Determinar a solução geral da equação

$$y^{V} - 2y^{IV} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0.$$

Resolução. A equação característica, neste caso, é

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

ou

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0,$$

sendo as suas raízes $\lambda_1 = 2$ (raiz simples), $\lambda_2 = \lambda_3 = i$, $\lambda_4 = \lambda_5 = -i$ (par conjugado de raízes imaginárias com multiplicidade 2). Logo, a solução geral tem a forma

$$y_h = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x.$$

EXEMPLO 5. Determinar a solução geral da equação

$$y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Resolução. A equação característica, neste caso, é

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$$

ou

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0,$$

sendo as suas raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 - i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1 + i$. Por conseguinte, a solução geral tem a forma

$$y_h = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x + C_3 x\, e^{-x}\cos x + C_4 x\, e^{-x}\sin x$$

ou

$$y = e^{-x}(C_1 + C_3 x)\cos x + e^{-x}(C_2 + C_4 x)\sin x.$$

Dadas as equações características, escreva as equações diferenciais lineares homogéneas correspondentes:

410. $9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0.$

411. $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$

412. $2\lambda^2 - 3\lambda - 5 = 0.$

413. $\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0.$

414. $(\lambda^2 + 1)^2 = 0.$

415. $\lambda^3 = 0.$

Dadas as raízes da equação característica, escreva a equação diferencial linear homogénea correspondente e determine a sua solução geral:

416. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$

417. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.$

418. $\lambda_1 = 3 - 2i, \lambda_2 = 3 + 2i.$

419. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1.$

Conhecendo o sistema fundamental de soluções, escreva a equação diferencial linear homogénea correspondente:

420. $e^{-x}, e^{x}.$

421. $1, e^{x}.$

422. $e^{-2x}, xe^{-2x}.$

423. $\sin 3x, \cos 3x.$

424. $1, x.$

425. $e^{x}, e^{2x}, e^{3x}.$

426. $e^{x}, xe^{x}, x^2e^{x}.$

427. $e^{x}, xe^{x}, e^{2x}.$

428. $1, x, e^{x}.$

429. $1, \sin x, \cos x.$

430. $e^{2x}, \sin x, \cos x.$

431. $1, e^{-x}\sin x, e^{-x}\cos x.$

Integre as seguintes equações e, onde for pedido, resolva os respectivos problemas de Cauchy.

432. $y'' - y = 0.$

433. $3y'' - 2y' - 8y = 0.$

434. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,$

$y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3.$

435. $y'' + 2y' + y = 0.$

436. $y'' - 4y' + 3y = 0.$
$y(0) = 6, y'(0) = 10.$

437. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0.$

438. $y'' - 2y' - 2y = 0.$

439. $y^{IV} + 2y^{V} + y^{IV} = 0.$

440. $4y'' - 8y' + 5y = 0.$

441. $y''' - 8y = 0.$

442. $y^{IV} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0.$

443. $y'' - 2y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

444. $y'' - 2y' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3.$

445. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0.$

446. $y^{V} + 4y^{V} + 5y''' - 6y'' - 4y = 0.$

447. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0.$

448. $y''' - 2y'' + 2y' = 0.$

449. $y^{IV} - y = 0.$

450. $y^{X} = 0.$

451. $y''' - 3y' - 2y = 0.$

452. $2y''' - 3y'' + y' = 0.$

453. $y''' + y'' = 0; y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1.$

3.º Equações lineares não homogéneas com coeficientes constantes.

A. O método da selecção.

Consideremos a equação diferencial

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = f(x) \tag{11}$$

com coeficientes reais constantes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

TEOREMA. A solução geral da equação não homogénea (11) é igual à soma da solução geral da equação homogénea associada com uma solução qualquer da solução não homogénea.

A solução geral da equação homogénea associada pode ser determinada segundo as regras acima expostas, no ponto 2.º Deste modo, o problema da integração de (11) reduz-se à determinação de uma solução particular y da equação não homogénea. No caso geral, a integração da equação (11) pode ser efectuada pelo método da variação das constantes arbitrárias (ver abaixo, no ponto 5.º). Quando o segundo membro tem uma forma especial, a solução particular pode ser determinada pelo chamado método da selecção. A forma geral do segundo membro $f(x)$ da equação (11), ao qual se pode aplicar o método da selecção, é a seguinte:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_l(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right],$$

onde $P_l(x)$ e $Q_m(x)$ são polinómios de grau l e m, respectivamente. Neste caso, uma solução particular y_{pn} da equação (11) deve ser procurada sob a forma

$$y_{pn} = x^s e^{\alpha x}\left[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right],$$

onde $k = \max(m, l)$, $\tilde{P}_k(x)$ e $\tilde{Q}_k(x)$ são polinómios de grau k em x, com a forma geral e coeficientes indeterminados, s é a multiplicidade da raiz $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ da equação característica (se $\alpha \pm i\beta$ não for raiz da equação característica, então $s = 0$).

EXEMPLO 1. Calcular a solução geral da equação $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

Resolução. A equação característica $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ tem três raízes distintas: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = i$, pelo que a solução geral da equação homogénea y_h tem a forma

$$y_h = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x.$$

Uma vez que zero não é raiz da equação característica, a solução particular da equação dada y_{pn} deve ser procurada sob a forma (ver Tabela 1, caso I (1)):

$$y_{pn} = A_1x^2 + A_1x + A_3,$$

onde A_1, A_2 e A_3 são coeficientes, por enquanto, desconhecidos, a determinar posteriormente. Substituindo a expressão de y_{pn} na equação dada, obtém-se

$$-A_1x^2 + (2A_1 - A_2)x + (A_2 - 2A_1 - A_3) = x^2 + x,$$

donde, igualando entre si os coeficientes associados a potências iguais de x, resulta

$$\begin{cases} A_1 = -1, \\ 2A_1 - A_2 = 1, \\ A_2 - 2A_1 - A_3 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtém-se $A_1 = -1$, $A_2 = -3$, $A_3 = -1$; logo, uma solução particular vai ser

$$y_{pn} = -x^2 - 3x - 1$$

e a solução geral será

$$y_{gn} = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x - x^2 - 3x - 1.$$

EXEMPLO 2. Calcular a solução geral da equação $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

Resolução. A equação característica $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ tem as raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, pelo que a solução geral da equação homogénea associada é

$$y_h = C_1 + C_2 + C_3e^x.$$

Uma vez que zero é uma raiz de multiplicidade 2 da equação característica, devemos procurar uma solução particular sob a forma (ver Tabela 1, caso I (2))

$$y_{pn} = x^2(A_1x^2 + A_2x + A_3) = A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2.$$

Substituindo a expressão de y_{pn} na equação dada, temos

$$-12A_1x^2 + (24A_1 - 6A_2)x + (6A_2 - 2A_3) = 12x^2 + 6x,$$

donde

$$\begin{cases} -12A_1 = 12, \\ 24A_1 - 6A_2 = 6, \\ 6A_2 - 2A_3 = 0. \end{cases}$$

A solução deste sistema é: $A_1 = -1$, $A_2 = -5$, $A_3 = -15$, pelo que $y_{ph} = -x^4 - 5x^3 - 15x^2$. A solução geral da equação dada é

$$y_{gn} = C_1 + C_2x + C_3e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2.$$

EXEMPLO 3. Calcular a solução geral da equação $y'' + y' = 4x^2 e^x$.

Resolução. A equação característica $\lambda^2 + \lambda = 0$ tem as raízes $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$; logo, a solução geral da equação homogénea associada é

$$y_h = C_1 + C_2e^x.$$

Uma vez que $\alpha = 1$ não é raiz da equação característica, devemos procurar uma solução particular y_{pn} da equação não homogénea sob a forma (ver Tabela 1, caso II (1))

$$y = (A_1x^2 + A_2x + A_3)\, e^x.$$

Substituindo esta expressão na equação dada e dividindo ambos os membros por e^x, obtém-se

$$2A_1x^2 + (6A_1 + 2A_2)\, x + 2A_1 + 3A_2 + 2A_3 = 4x^2.$$

Igualando entre si os coeficientes associados a potências iguais de x, obtém-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2A_1 = 4, \\ 6A_1 + 6A_2 = 0, \\ 2A_1 + 3A_2 + 2A_3 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, temos: $A_1 = 2$, $A_2 = -6$, $A_3 = 7$, pelo que $y_{pn} = (2x^2 - 6x + 7)\, e^x$. A solução geral da equação dada é

$$y(x) = C_1 + C_2e^{-x} + (2x^2 - 6x + 7)\, e^x.$$

EXEMPLO 4. Calcular a solução geral da equação $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$.

Resolução. A equação característica $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ tem a raiz $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$ de multiplicidade 2, pelo que a solução geral da equação homogénea associada é $y_h = (C_1 + C_2x)\, e^{-5x}$.

Uma vez que $\alpha = -5$ é uma raiz de multiplicidade $s = 2$ da equação característica, devemos procurar uma solução particular sob a forma (ver Tabela 1, caso II (2))

$$y_{pn} = Bx\, e^{-5x}\ ; \text{ então}$$

$$y'_{pn} = B(2x - 5x^2)\, e^{-5x}\,,$$

$$y''_{pn} = B(2 - 20x + 25x^2)\, e^{-5x}\,.$$

Substituindo as expressões de y_{pn}, y'_{pn} e y''_{pn} na equação dada, obtemos $2B\, e^{-5x} = 4e^{-5x}$, donde $B = 2$; logo, $y_{pn} = 2x^2 e^{-5x}$. A solução geral da equação dada é:

$$y(x) = (C_1 + C_2x)\, e^{-5x} + 2x^2 e^{-5x}.$$

EXEMPLO 5. Calcular a solução geral da equação

$$y'' + 3y' + 2y = x \sin x.$$

Primeiro Método — Resolução. A equação característica $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ tem as raízes $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, pelo que a solução geral da equação homogénea associada é

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2\, e^{-2x}.$$

Uma vez que i não é raiz da equação característica, devemos procurar uma solução particular y_{pn} sob a forma (ver Tabela 1, caso III (1)):

$$y_{pn} = (A_1x + A_2) \cos x + (B_1x + B_2) \sin x.$$

Daqui tem-se

$$y'_{pn} = (A_1 + B_2 + B_1x) \cos x + (B_1 - A_2 - A_1x) \sin x,$$

$$y''_{pn} = (2B_1 - A_2 - A_1x) \cos x - (2A_1 + B_2 + B_1x) \sin x.$$

Substituindo estas expressões equação inicial, teremos

$$(2B_1 - A_2 - A_1x) \cos x - (2A_1 + B_2 + B_1x) \sin x + 3(A_1 + B_2 + B_1x) \cos x +$$

$$+ 3(B_1 - A_2 - A_1x) \sin x + 2(A_1x + A_2) \cos x + 2(B_1x + B_2) \sin x = x \sin x,$$

ou

$$[(A_1 + 3B_1)\,x + 3A_1 + A_2 + 2B_1 + 3B_2] \cos x +$$

$$+ [(-3A_1 + B_1)\,x - 2A_1 - 3A_2 + 3B_1 + B_2] \sin x = x \sin x.$$

Daqui obtém-se o seguinte sistema de equações lineares, em ordem a A_1, A_2, B_1 e B_2:

$$\begin{cases} A_1 + 3B_1 = 0, \\ 3A_1 + A_2 + 2B_1 + 3B_2 = 0, \\ -3A_1 + B_1 = 1, \\ -2A_1 - 3A_2 + 3B_1 + B_2 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtém-se $A_1 = -3/10$, $A_2 = 17/50$, $B_1 = 1/10$, $B_2 = 3/25$ e pode escrever-se uma solução particular y_{pn} sob a forma

$$y_{pn} = \left(-\tfrac{3}{10}x + \tfrac{17}{50}\right)\cos x + \left(\tfrac{1}{10}x + \tfrac{3}{25}\right)\sin x.$$

A solução geral da equação dada tem, portanto, a forma

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(-\tfrac{3}{10}x + \tfrac{17}{50}\right)\cos x + \left(\tfrac{1}{10}x + \tfrac{3}{25}\right)\sin x. \ ✦$$

Quando o segundo membro $f(x)$ contém as funções trigonométricas $\sin \beta x$ e $\cos \beta x$, torna-se mais cómodo passar para as funções exponenciais. Vamos ilustrar esta técnica através de um exemplo.

Resolver a equação diferencial

$$y'' + y = x \cos x.$$

Neste caso, temos $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$, pelo que a solução geral da equação homogénea tem a forma

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Devemos procurar uma solução particular da equação não homogénea sob a forma

$$y_{pn} = x\,[(A_1 x + A_2) \cos x + (B_1 x + B_2) \sin x].$$

Procedemos do seguinte modo. Consideremos a equação

$$z'' + z = x\, e^{ix}. \qquad (12)$$

Como facilmente se verifica, o segundo membro da equação inicial é a parte real do segundo membro da equação (12):

$$x \cos x = \mathrm{Re}\,(x e^{ix}).$$

TEOREMA. Se a equação diferencial com coeficientes reais $L\,[y] = f_1(x) + i f_2(x)$ admitir a solução $y = u(x) + i v(x)$, então $u(x)$ é uma solução da equação $L\,[y] = f_1(x)$ e $v(x)$ é solução da equação $L\,[y] = f_2(x)$.

Determinemos uma solução particular z_{pn} da equação (12):

$$z_{pn} = (Ax + B)\, x\, e^{ix} = (Ax^2 + Bx)\, e^{ix},$$

$$z''_{pn} = 2A\, e^{ix} + 2(2Ax + B)\, i\, e^{ix} - (Ax + Bx)\, e^{ix}.$$

Substituindo estas expressões na equação (12) e dividindo ambos os membros por e^{ix}, teremos

$$2A + 4Axi + 2Bi = x,$$

donde $4Ai = 1$, $A = -i/4$, $A + Bi = 0$, $B = -A/i = 1/4$; deste modo,

$$z_{pn} = \left(-\tfrac{i}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}x\right) e^{ix} = \left(-\tfrac{i}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}x\right)(\cos x + i \sin x) = \frac{x \cos + x^2 \sin x}{4} + \frac{x \sin x - x^2 \cos x}{4}.$$

Daqui, com base no teorema, obtém-se

$$y_{pn} = \mathrm{Re}\, z_{pn} = \frac{x \cos x + x^2 \sin x}{4}.$$

Esta técnica permite, por vezes, simplificar drasticamente os cálculos, relacionados com a determinação de soluções particulares.

Segundo Método — Resolução. Vamos resolver este exemplo através da passagem às funções exponenciais. Consideremos a equação:

$$z'' + 3z' + 2z = x\, e^{ix}. \qquad (13)$$

Como é fácil verificar, o segundo membro da equação inicial é igual à parte imaginária de $x\, e^{ix}$:

$$x \sin x = \mathrm{Im}\,(x\, e^{ix}).$$

Procuremos uma solução particular z_{pn} da equação (13) sob a forma

$$z_{pn} = (Ax + B)\,e^{ix},$$

então

$$z'_{pn} = A\,e^{ix} + i\,(Ax + B)\,e^{ix}, \quad z''_{pn} = 2i\,A\,e^{ix} - (Ax + B)\,e^{ix}.$$

Substituindo estas expressões em (13) e dividindo por e^{ix}, temos

$$2Ai - Ax - B + 3A + 3Aix + 3Bi + 2Ax + 2B = x,$$

donde

$$\begin{cases} A + 3Ai = 1, \\ 2Ai + B + 3A + 3Bi = 0. \end{cases}$$

Assim, temos

$$A = \frac{1}{1+3i} = \frac{1}{10} - \frac{3i}{10}, \quad B = -\frac{A(3+2i)}{1+3i} = \frac{6}{50} + \frac{17}{50}i.$$

Logo,

$$z_{pn} = \left(\frac{1-3i}{10}x + \frac{6+17i}{50}\right)e^{ix} = \left(\frac{5x+6}{50} + \frac{17-15x}{50}i\right)\times(\cos x + i\sin x) =$$

$$= \frac{(5x+6)\cos x + (15x-17)\sin x}{50} + i\,\frac{(5x+6)\sin x + (17-15x)\cos x}{50};$$

daqui resulta

$$y_{pn} = \operatorname{Im} z_{pn} = \frac{5x+6}{50}\sin x + \frac{17-15x}{50}\cos x,$$

o que coincide com a solução particular anteriormente determinada.

EXEMPLO 6. Determinar a solução geral da equação $y'' + 4y = \sin 2x$.

Resolução. Consideremos a equação $z'' + 4z = e^{2ix}$.
Temos

$$\sin 2x = \operatorname{Im} e^{2ix}, \text{ donde } y_{pn} = \operatorname{Im} z_{pn}.$$

A equação característica $\lambda^2 + 4 = 0$ tem as raízes simples $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Por conseguinte, vamos procurar uma solução particular sob a forma (ver Tabela 1, caso III (2)):

$$z_{pn} = Ax\,e^{2ix},$$

então

$$z''_{pn} = -4Ax\,e^{2ix} + 4Ai\,e^{2ix}.$$

Substituindo as expressões de z_{pn} e z''_{pn} na equação e dividindo ambos os membros por e^{2ix}, obtém-se $4Ai = 1$, donde $A = -i/4$, pelo que

$$z_{pn} = -\tfrac{1}{4}ix\,e^{2ix} = \tfrac{1}{4}x\sin 2x - i\tfrac{1}{4}x\cos 2x.$$

Uma solução particular da equação não homogénea considerada será

$$y_{pn} = \operatorname{Im} z_{pn} = -\tfrac{1}{4}x\cos 2x.$$

EXEMPLO 7. Calcular a solução geral da equação $y'' - 6y' + 9y = 25\,e^x \sin x$.

Resolução. A equação característica $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ tem as raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$; a solução geral y_h da equação homogénea é

$$y_h = (C_1 + C_2 x)\,e^{3x}.$$

Os números $1 \pm i$ não são raízes da equação característica, pelo que se pode procurar uma solução particular da equação não homogénea sob a forma (ver Tabela 1, caso IV (1)):

$$y_{pn} = e^x\,(a\cos x + b\sin x).$$

Substituindo a expressão de y_{pn} na equação e dividindo ambos os seus membros por e^x, obtém-se

$$(3a - 4b)\cos x + (4a + 3b)\sin x = 25\sin x.$$

Daqui obtém-se o sistema $3a - 4b = 0$, $4b + 3b = 25$, cuja solução é $a = 4$, $b = 3$ e, por conseguinte,

$$y_{pn} = e^x\,(4\cos x + 3\sin x).$$

A solução geral da equação dada é

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\,e^{3x} + e^x\,(4\cos x + 3\sin x).$$

EXEMPLO 8. Calcular a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \cos 2x.$$

Resolução. A equação característica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ tem as raízes $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$, de tal modo que

$$y_h = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\, e^{-x}.$$

Uma vez que o número $\alpha + i\beta = -1 + 2i$ é uma raiz simples da equação característica, devemos procurar uma solução particular y_{pn} sob a forma (ver Tabela 1, caso IV (2))

$$y_{pn} = x\,(A \cos 2x + B \sin 2x)\, e^{-x};$$

logo

$$y'_{pn} = e^{-x}[(A - Ax + 2Bx)\cos 2x + (B - Bx - 2Ax)\sin 2x],$$

$$y''_{pn} = e^{-x}[(-2A - 3Ax + 4B - 4Bx)\cos 2x + (-2B - 3Bx - 4A + 4Ax)\sin 2x].$$

Substituindo as expressões de y_{pn} e das suas derivadas na equação inicial e dividindo ambos os membros por e^{-x}, teremos

$$-4A \sin 2x + 4B \cos 2x = \cos 2x,$$

donde $A = 0$, $B = 1/4$ e, por conseguinte,

$$y_{pn} = 1/4\, x\, e^{-x} \sin 2x.$$

A solução geral da equação dada vai ser

$$y(x) = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\, e^{-x} + 1/4\, x\, e^{-x} \sin 2x.$$

Indicar a forma duma solução particular da equação não homogénea, se forem conhecidas as raízes da equação característica e o segundo membro $f(x)$:

454. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2;\ f(x) = ax^2 + bx + c.$

455. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1;\ f(x) = ax^2 + bx + c.$

456. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0;\ f(x) = ax^2 + bx + c.$

457. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2;\ f(x) = e^{-x}(ax + b).$

458. $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1;\ f(x) = e^{-x}(ax + b).$

459. $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1;\ f(x) = e^{-x}(ax + b).$

460. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1;\ f(x) = \sin x + \cos x.$

461. $\lambda_1 = -i,\ \lambda_2 = i;\ f(x) = \sin x + \cos x.$

462. $\lambda_1 = -2i,\ \lambda_2 = 2i;\ f(x) = A \sin 2x + B \cos 2x.$

463. $\lambda_1 = -ki,\ \lambda_2 = ki;\ f(x) = A \sin kx + B \cos kx.$

464. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1;\ f(x) = e^{-x}(A \sin x + B \cos 2x).$

465. $\lambda_1 = -1 - i,\ \lambda_2 = -1 + i;\ f(x) = e^{-x}(A \sin x + B \cos 2x).$

466. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1;\ f(x) = ax^2 + bx + c.$

467. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2;\ f(x) = ax^2 + bx + c.$

468. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1;\ f(x) = ax^2 + bx + c.$

469. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0;\ f(x) = ax^2 + bx + c.$

470. $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,\ \lambda_3 = 1;\ f(x) = \sin x + \cos x.$

471. *a)* $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,$
b) $\lambda_1 = k,\ \lambda_2 = 1,$
c) $\lambda_1 = \lambda_2 = k,$
d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1,$
e) $\lambda_1 = \lambda_2 = k,\ \lambda_3 = 1,$
f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = k,$

$f(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{kx}$, $k \neq 0,\ k \neq 1.$

472. *a)* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,$
b) $\lambda_1 = -i,\ \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = 0$

$f(x) = a \sin x + b \cos x.$

473. *a)* $\lambda_1 = 3 - 2i,\ \lambda_2 = 3 - 2i,\ \lambda_3 = \lambda_4 = 0,$
b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3 - 2i,\ \lambda_3 = \lambda_4 = 3 + 2i$

$f(x) = e^{3x}(\sin 2x + \cos 2x).$

Indicar a forma duma solução particular de cada uma das seguintes equações lineares não homogéneas:

474. $y'' + 3y' = 3.$

475. $y'' - 7y' = (x-1)^2.$

476. $y'' + 3y' = e^x.$

477. $y'' + 7y' = e^{-7x}.$

478. $y'' - 8y' + 16y = (1-x)\,e^{4x}.$

479. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}.$

480. $4y'' - 3y' = x\,e^{3/4\,x}.$

481. $y'' - 4y' = x\,e^{4x}.$

482. $y'' + 25y' = \cos 5x.$

483. $y'' + y = \sin x - \cos x.$

484. $y'' + 16y = \sin(4x + \alpha).$

485. $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x).$

486. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x).$

487. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 2x.$

488. $y'' + k^2y = k\sin(kx + \alpha).$

489. $y'' + k^2y = k.$

490. $y''' + y = x.$

491. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 1.$

492. $y''' + y' = 2.$

493. $y''' + y'' = 3.$

494. $y^{IV} - y = 1.$

495. $y^{IV} - y' = 2.$

496. $y^{IV} - y'' = 3.$

497. $y^{IV} - y''' = 4.$

498. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = 1.$

499. $y^{IV} + 2y''' + y'' = e^{4x}.$

500. $y^{IV} + 2y''' + y'' = e^{-x}.$

501. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x\,e^{-x}.$

502. $y^{IV} + 4y'' + 4y = \sin 2x.$

503. $y^{IV} + 4y'' + 4y = \cos x.$

504. $y^{IV} + 4y'' + 4y = x\sin 2x.$

505. $y^{IV} + 2n^2y'' + n^4y = a\sin(nx + \alpha).$

506. $y^{IV} + 2n^2y'' + n^4y = \cos(nx + \alpha).$

507. $y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = \sin x.$

508. $y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = e^x.$

509. $y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = x\,e^x.$

Resolva as seguintes equações lineares não homogéneas:

510. $y'' + 2y' + y = -2.$

511. $y'' + 2y' + 2 = 0.$

512. $y'' + 9y - 9 = 0.$

513. $y''' + y'' = 1.$

514. $5y''' - 7y'' - 3 = 0.$

515. $y^{IV} - 6y''' + 6 = 0.$

516. $3y^{IV} + y''' = 2.$

517. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 1.$

518. $y'' - 4y' + 4y = x^2.$

519. $y'' + 8y' = 8x.$

520. $y'' - 2ky' + k^2y = e^x,\ (k = 1).$

521. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}.$

522. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}.$

523. $7y'' - y' = 14x.$

524. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}.$

525. $y'' + 5y' + 6y = 10(1-x)\,e^{-2x}.$

526. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x.$

527. $y'' + y' + y = (x + x^2)\,e^x.$

528. $y'' + 4y' - 2y = 8\sin 2x.$

529. $y'' + y = 4x\cos x.$

530. $y'' - 2my' + m^2y = \sin nx.$

531. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 2x.$

532. $y'' + a^2y = 2\cos mx + 3\sin mx\ (m \neq a).$

533. $y'' - y' = e^x\sin x.$

534. $y'' + 4y' = 4e^x(\sin x + \cos x).$

535. $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x}\cos x.$

536. $4y'' + 8y' = x\sin x.$

537. $y'' - 3y' + 2y = xe^x.$

538. $y'' + y' - 2y = x^2e^{4x}.$

539. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)\,e^{3x}.$

540. $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x.$

541. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x.$

542. $y'' - 2y' + y = x^3.$

543. $y^{IV} + y'' = x^2 + x.$

544. $y'' + y = x^2\sin x.$

545. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}\cos x.$

546. $y''' - y = \sin x.$

547. $y^{IV} - 2y'' + y = \cos x.$

548. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x\cos 2x.$

549. $y'' - 4y'' + 5y = e^{2x}(\sin x + 2\cos x).$

B. O princípio da sobreposição.

Ao determinar soluções particulares de equações não homogéneas torna-se útil, por vezes, o seguinte teorema.

TEOREMA (PRINCÍPIO DA SOBREPOSIÇÃO). Se $y_k(x)$ for solução da equação

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\,y = f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

então a função $y(x) = \sum_{k=1}^{m} y_k(x)$ é solução da equação

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\,y = \sum_{k=1}^{m} f_k(x).$$

EXEMPLO 9. Resolver a equação

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^x - 16e^{3x}. \tag{14}$$

Resolução. A equação característica $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ tem as raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, pelo que a solução geral y_h da equação homogénea associada será

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Com o objectivo de determinar uma solução particular da equação (14), procuremos soluções particulares das equações

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^x, \tag{15}$$

$$y'' - 6y' + 9y = -16e^{3x}. \tag{16}$$

A equação (15) admite uma solução particular y_1 do tipo $y_1 = A\,e^x$. (ver Tabela I, caso II (1)) Substituindo a expressão de y_1 na equação (15), obtém-se $A = 1$, pelo que $y_1 = e^x$. No caso da equação (16), procuramos uma solução particular sob a forma $y_2 = Bx^2 e^{3x}$. (ver Tabela 1, caso II (2)) Obtém-se assim $y_2 = -8x^2 e^{3x}$.

De acordo com o princípio da sobreposição de soluções, uma solução particular y_{pn} da equação dada será igual à soma das soluções particulares y_1 e y_2 das equações (15) e (16):

$$y_{pn} = y_1 + y_2 = e^x - 8x^2 e^{3x}.$$

A solução geral da equação (14) é

$$y = (C_1 + C_2 x)\,e^{3x} + e^x - 8x^2 e^{3x}.$$

EXEMPLO 10. Resolver a equação

$$y''' - 2y'' + 2y' = 4\cos x \cos 3x + 6\sin^2 x. \tag{17}$$

Resolução. Utilizando as fórmulas trigonométricas conhecidas, reduzamos o segundo membro da equação (17) a uma forma "standard":

$$4\cos x \sin 3x + 6\sin^2 x = 2\cos 4x - \cos 2x + 3.$$

A equação inicial (17) pode agora escrever-se sob a forma

$$y''' - 2y'' + 2y' = 2\cos 4x - \cos 2x + 3. \tag{18}$$

A solução geral da equação homogénea $y''' - 2y'' + 2y' = 0$ tem a forma

$$y_h = C_1 + (C_2\cos x + C_3 \sin x)\,e^x.$$

A fim de determinar uma solução particular da equação (18) vamos utilizar o princípio da sobreposição. Para isso, determinemos uma solução particular de cada uma das três equações:

$$y''' - 2y'' + 2y' = 2\cos 4x, \tag{19}$$

$$y''' - 2y'' + 2y' = -\cos 2x, \tag{20}$$

$$y''' - 2y'' + 2y' = 3. \tag{21}$$

Pelo método da selecção, determinemos soluções particulares de (19),(20) e (21), respectivamente:

$$y_1 = \tfrac{1}{65}\left(\cos 4x - \tfrac{7}{4}\sin 4x\right),$$

$$y_2 = \tfrac{1}{10}\left(\tfrac{1}{2}\sin 2x - \cos 2x\right), \quad y_3 = \tfrac{3}{2}x.$$

De acordo com o princípio da sobreposição, a equação não homogénea (18) tem uma solução particular da forma

$$y_{pn} = \tfrac{1}{65}\left(\cos 4x - \tfrac{7}{4}\sin 4x\right) + \tfrac{1}{10}\left(\frac{\sin 2x}{2} - \cos 2x\right) + \tfrac{3}{2}x.$$

A solução geral da equação considerada é, portanto,

$$y = C_1 + (C_2\cos x + C_3\sin x)\,e^x + \tfrac{1}{65}\left(\cos 4x - \tfrac{7}{4}\sin 4x\right) + \tfrac{1}{10}\left(\frac{\sin 2x}{2} - \cos 2x\right) + \tfrac{3}{2}x.$$

Determinar a forma duma solução particular da equação linear não homogénea, sendo conhecidas as raízes da equação característica correspondente e o segundo membro $f(x)$.

550. *a*) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,$
b) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3,$
c) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1,$
d) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1,$
$\Bigg\}\ f(x) = ae^{-x} + be^{x}.$

Baseando-se no princípio da sobreposição, indicar a forma duma solução particular das seguintes equações lineares não homogéneas:

551. $y'' - y' - 2y = e^x + e^{-2x}$.

552. $y'' + 4y' = x + e^{-4x}$.

553. $y'' - y = x + \sin x$.

554. $y'' - 2y' + 2y = (1 + \sin x)\, e^x$.

555. $y''' - y'' = 1 + e^x$.

556. $y''' + 4y' = e^{2x} + \sin 2x$.

557. $y''' + 4y = \sin x \sin 2x$.

558. $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$.

Resolva as seguintes equações lineares não homogéneas, baseando-se no princípio da sobreposição para determinar uma solução particular de cada uma.

559. $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$.

560. $y'' - 3y' = 18x - 10\cos x$.

561. $y'' - 2y' + y = 2 + e^x \sin x$.

562. $y'' + 2y' + 2y = (5x + 4)\, e^x + e^{-x}$.

563. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} + 17\sin 2x$.

564. $2y'' - 3y' - 2y = 5e^x \operatorname{ch} x$.

565. $y'' + 4y = x\sin^2 x$.

566. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \tfrac{1}{2}\cos x$.

567. $y'' + y' = \cos x + e^x + x^2$.

568. $y^{\mathrm{V}} + 4y''' = e^x + 3\sin 2x + 1$.

569. $y'' - 2y' + 5y = 10\sin x + 17\sin 2x$.

570. $y'' + y' = x^2 - e^{-x} + e^x$.

571. $y'' - 2y' - 3y = 2x + e^{-x} - 2e^{3x}$.

572. $y'' + 4y = e^x + 4\sin 2x + 2\cos^2 x - 1$.

573. $y'' + 3y' + 2y = 6xe^{-x}(1 - e^{-x})$.

574. $y'' + y = \cos^2 x + \sin^2 \tfrac{x}{2}$.

575. $y'' - 4y' + 5y = 1 + 8\cos x + e^{2x}$.

576. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin^2 \tfrac{x}{2}$.

577. $y'' - 3y' = 1 + e^x + \cos x + \sin x$.

578. $y'' - 2y' + 5y = e^x(1 - 2\sin^2 x) + 10x + 1$.

579. $y'' - 4y' + 4y = 4x + \sin x + \sin 2x$.

580. $y'' + 2y' + y = 1 + 2\cos x + \cos 2x - \sin 2x$.

581. $y'' + y' + y + 1 = \sin x + x + x^2$.

582. $y'' + 6y' + 9y = 18e^{-3x} + 8\sin x + 6\cos x$.

583. $y'' + 2y' + 1 = 3\sin 2x + \cos x$.

584. $y''' - 2y'' + y' = 2x + e^x$.

585. $y'' + y = 2\sin x \sin 2x$.

586. $y''' - y'' - 2y' = 4x + 3\sin x + \cos x$.

587. $y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin x + x^2$.

588. $y^{\mathrm{V}} - y^{\mathrm{IV}} = xe^x - 1$.

589. $y^{\mathrm{V}} + y''' = x + 2e^{-x}$.

C. O Problema de Cauchy.

Como já sabemos, o problema de Cauchy para a equação linear não homogénea

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = f(x)$$

consiste em calcular a solução desta equação que satisfaz as seguintes condições iniciais (condições de Cauchy):

$$y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y_0', \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

EXEMPLO 11. Determinar a solução particular da equação

$$y'' - y = 4e^x \tag{22}$$

que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 0,\quad y'(0) = 1. \tag{23}$$

Resolução. Calculemos a solução geral da equação (22):

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 2xe^x \tag{24}$$

Para resolver o problema de valores iniciais (22)-(23) (problema de Cauchy), torna-se necessário determinar os valores das constantes C_1 e C_2 de tal modo que a solução (24) satisfaça as condições iniciais (23). Da condição $y(0) = 0$ obtém-se $C_1 + C_2 = 0$. Diferenciando (24), obtém-se

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + 2e^x + 2xe^x,$$

donde, atendendo à condição $y'(0) = 1$, se obtém $C_1 - C_2 = -1$. As constantes C_1 e C_2 podem ser determinadas resolvendo o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = -1 \end{cases}$$

cuja solução é $C_1 = -1/2$, $C_2 = 1/2$. Substituindo os valores obtidos das constantes arbitrárias na solução geral (24), obtém-se a solução do problema de valores iniciais (22)-(23):

$$y = -\tfrac{1}{2}e^x + \tfrac{1}{2}e^{-x} + 2xe^x \quad \text{ou}$$

$$y = 2xe^x - \text{sh}\, x.$$

EXEMPLO 12. Calcule uma solução particular da equação

$$y'' + 4y' + 5y = 8 \cos x, \tag{25}$$

que seja limitada quando $x \to -\infty$.

Resolução. A solução geral da equação dada é

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_{12} \sin x) + 2(\cos x + \sin x). \tag{26}$$

Quando $x \to -\infty$, temos $e^{-2x} \to \infty$ e, para quaisquer C_1 e C_2, não simultaneamente nulos, a primeira parcela do segundo membro de (26) é uma função ilimitada quando $x \to -\infty$, enquanto a segunda é uma função limitada. Logo, só no caso de $C_1 = C_2 = 0$ é que temos uma solução da equação (25), limitada quando $x \to -\infty$. Nesse caso, a solução é

$$y = 2(\cos x + \sin x). \tag{27}$$

Aliás, a solução (27) da equação (25) é limitada para qualquer valor de x:

$$|y| = |2(\cos x + \sin x| \le 2(|\cos x| + |\sin x|) < 4,$$

para qualquer $x \in (-\infty, \infty)$.

EXEMPLO 13. Calcular uma solução particular da equação

$$y'' - 3y' + 2y = 4 + 2e^{-x} \cos x, \tag{28}$$

que satisfaça a condição $y \to 2$ quando $x \to \infty$.

Resolução. A solução geral da equação dada é

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 2 + e^{-x} (\sin x - \cos x). \tag{29}$$

Quaisquer que sejam C_1 e C_2, não simultaneamente nulos, a solução (29) é uma função ilimitada quando $x \to +\infty$. Quando $C_1 = C_2 = 0$, a solução da equação (28) é a função $y = 2 + e^{-x} (\sin x - \cos x)$, a qual satisfaz, evidentemente, a condição $\lim_{x\to\infty} y = 2$. Deste modo,

$$y = 2 + (\sin x - \cos x)\, e^{-x}$$

é a solução particular procurada.

Nos problemas seguintes calcule soluções particulares das equações que satisfaçam as condições iniciais dadas:

590. $y'' + y = 2(1 - x)$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.

591. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

592. $y'' + 9y = 36e^{3x}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.

593. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.

594. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)\, e^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.

595. $y'' + y' = e^{-x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

596. $y'' + 6y' + 9y = 10 \sin x$; $y(0) = y'(0) = 0$.

597. $y'' + y = 2 \cos x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

598. $y'' + 4y = \sin x$; $y(0) = y'(0) = 1$.

599. $y'' + y = 4x \cos x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

600. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

601. $y'' + 6y' + 9y = 16e^{-x} + 9x - 6$; $y(0) = y'(0) = 1$.

602. $y'' + y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x)$; $y(0) = -4$, $y'(0) = 5$.

603. $y'' - 2y' + 2y = 4e^{-x}\cos x$; $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e\pi$.

604. $y''' - y' = -2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$.

605. $y^{IV} - y = 8e^{x}$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

606. $y''' - y = 2x$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$, $y'''(0) = 6$.

607. $y^{IV} - y = 8e^{x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 6$.

Nos problemas seguintes calcular soluções particulares das equações que satisfaçam as condições dadas no infinito.

608. $y'' - 4y + 5y = \sin x$, y é limitado quando $x \to +\infty$.

609. $y'' + 2y' + 5y = 4\cos 2x + \sin 2x$, y é limitado quando $x \to -\infty$.

610. $y'' - y = 1$, y é limitado quando $x \to \infty$.

611. $y'' - y = -2\cos x$, y é limitado quando $x \to \infty$.

612. $y'' - 2y' + y = 4e^{x}$, $y \to 0$ quando $x \to +\infty$.

613. $y'' + 4y' + 3y = 8e^{x} + 9$, $y \to 3$ quando $x \to -\infty$.

614. $y'' - y' - 5y = 1$, $y \to -1/5$ quando $x \to \infty$.

615. $y'' + 4y' + 4y = 2e^{x}(\sin x + 7\cos x)$, $y \to 0$ quando $x \to -\infty$.

616. $y'' - 4y' + 6y = 2e^{-2x}(9\sin 2x + 4\cos 2x)$, $y \to 0$ quando $x \to +\infty$.

617. $y'' - 4y' + 4y = (9x^2 + 5x - 12)e^{-x}$, $y \to 0$ quando $x \to +\infty$.

Tabela 1

Formas de soluções particulares de equações não homogéneas para diferentes tipos de segundos membros (*)

N.º	Segundo membro da equação diferencial	Raízes da equação característica	Forma da solução particular
I	$P_m(x)$	1. O número 0 não é raiz da equação característica.	$\tilde{P}_m(x)$
		2. O número 0 é raiz da equação característica com multiplicidade s.	$x^s\tilde{P}_m(x)$
II	$P_m(x)e^{\alpha x}$	1. O número α não é raiz da equação característica.	$\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
		2. O número α é raiz da equação característica com multiplicidade s.	$x^s\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
III	$P_n(x)\cos Bx + Q_m(x)\sin Bx$	1. Os números $\pm iB$ não são raízes da equação característica.	$\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x$ $k = \max(n, m)$
		2. Os números $\pm iB$ são raízes da equação característica com multiplicidade s.	$x^s(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x)$ $k = \max(n, m)$
IV	$e^{\alpha x}[P_n(x)\cos Bx + Q_m(x)\sin Bx]$	1. Os números $\alpha \pm iB$ não são raízes da equação característica.	$(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$ $k = \max(n, m)$
		2. Os números $\alpha \pm iB$ são raízes da equação característica com multiplicidade s.	$x^s(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$ $k = \max(n, m)$

(*) Os primeiros três tipos de segundos membros são casos particulares do tipo IV.

4.º Equações de Euler.

As equações lineares com a forma

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{(n-1)}xy' + a_ny = 0, \qquad (30)$$

onde todos os coeficientes a_i são constantes, designam-se equações de Euler. Por meio da substituição da variável independente $x = e^t$, estas equações podem ser reduzidas a equações lineares homogéneas com coeficientes constantes:

$$b_0y_t^{(n)} + b_1y_t^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}y_t' + b_ny(t) = 0. \qquad (31)$$

1.ª Observação. As equações do tipo

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax+b)\,y' + a_ny = 0$$

também se designam equações de Euler e reduzem-se a equações lineares com coeficientes constantes mediante a substituição de variável $ax + b = e^t$.

2.ª Observação. Soluções particulares da equação (30) podem ser procuradas imediatamente sob a forma $y = x^k$; neste caso, k pode ser calculado resolvendo uma equação equivalente à equação característica da equação (31).

EXEMPLO 1. Determinar a solução geral da equação de Euler $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$.

Primeiro método. Façamos a substituição $x = e^t$ na equação dada; então obtém-se

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)}{e^t} = e^{-2t}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

pelo que a equação toma a forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

As raízes da equação característica são $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$, pelo que a solução geral da última equação é $y = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}$. Mas uma vez que $x = e^t$, então $y = C_1x^{-3} + C_2x^2$ ou

$$y = \frac{C_1}{x^3} + C_2x^2.$$

Segundo método. Vamos procurar uma solução dada sob a forma $y = x^k$, onde k é uma incógnita. Temos $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-1}$. Substituindo estas expressões na equação, obtém-se

$$x^2k(k-1)x^{k-2} + 2\,xkx^{k-1} - 6x^k = 0,$$

ou

$$x^k[k(k-1) + 2k - 6] = 0.$$

Mas, uma vez que $x \neq 0$, obtém-se $k(k-1) + 2k - 6 = 0$, ou $k^2 + k - 6 = 0$. As raízes desta equação são $k = -3$, $k = 2$. A elas corresponde o sistema fundamental de soluções $y_1 = x^{-3}$, $y_2 = x^2$, pelo que a solução geral será, como já sabíamos,

$$y = C_1x^{-3} + C_2x^2. \ \blacklozenge$$

As equações não homogéneas de Euler, do tipo

$$\sum_{k=0}^{n} a_kx^ky^{(k)} = x^\alpha P_m(\ln x),$$

onde $P_m(u)$ é um polinómio de grau m, também podem ser resolvidas pelo método da selecção, por analogia com as equações lineares não homogéneas de coeficientes constantes e com o segundo membro da forma $e^{\alpha x} P_m(x)$.

EXEMPLO 2. Resolver a equação de Euler $x^2y'' - xy' + 2y = x \ln x$.

Resolução. A equação característica $k(k-1) - k + 2 = 0$ ou $k^2 - 2k + 2 = 0$ tem as raízes $k_1 = 1 - i$, $k_2 = 1 + i$. Logo, a solução geral da equação homogénea correspondente é

$$y_h = x(C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x).$$

Vamos procurar uma solução particular sob a forma $y_p = x(A \ln x + B)$; temos

$$y_p' = A \ln x + B + A,\ y'' = A/x.$$

Substituindo na equação dada, obtém-se

$$Ax - x(A\ln x + A + B) + 2x(A\ln x + B) = x\ln x,$$

ou

$$Ax\ln x + Bx = x\ln x,$$

donde $A = 1$, $B = 0$. Logo, $y_p = x\ln x$. A solução geral será

$$y = x(C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x) + x\ln x.$$

Integre as seguintes equações homogéneas de Euler:

618. $x^2y'' + xy' - y = 0.$

619. $x^2y'' + 3xy' + y = 0.$

620. $x^2y'' + 2xy' + 6y = 0.$

621. $xy'' + xy' = 0.$

622. $(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0.$

623. $(2x+1)^2y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0.$

624. $x^2y''' - 3xy'' + 6y' = 0.$

625. $x^2y'' = 2y'.$

626. $(x+1)^2y''' - 12y' = 0.$

627. $(2x+1)^2y''' + 2(2x+1)y'' + y' = 0.$

Integre as seguintes equações não homogéneas de Euler:

628. $x^2y'' + xy' + y = x(6 - \ln x).$

629. $x^2y'' - 2y = \sin\ln x.$

630. $x^2y'' - xy' - 3y = -\dfrac{16\ln x}{x}.$

631. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2.$

632. $x^2y'' + xy' - y = x^m,\ |m| \neq 1.$

633. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\ln^2 x + 12x.$

634. $(x+1)^3y'' + 3(x+1)^2y' + (x+1)y = 6\ln(x+1).$

635. $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x.$

5.° Equações lineares com coeficientes variáveis. Método de Lagrange.

Se for conhecida uma solução particular $y_1(x)$ da equação

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0, \qquad (32)$$

então a sua ordem pode ser reduzida numa unidade (conservando a linearidade da equação), se fizermos a substituição $y = y_1z$, onde z é a nova função incógnita, e depois a substituição $z' = u$ [também é possível fazer imediatamente a substituição $u = (y/y_1)'$].

Se forem conhecidas k soluções linearmente independentes da equação (32), então a ordem da equação pode ser reduzida em k unidades.

A solução geral da equação

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x), \qquad (33)$$

é a soma de uma solução particular qualquer com a solução geral da equação homogénea associada (32).

Se for conhecido o sistema fundamental da equação homogénea associada (32), a solução geral da equação não homogénea pode ser determinada pelo método da variação das constantes arbitrárias (método de Lagrange).

A solução geral da equação (32) tem a forma

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n,$$

onde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ são constantes arbitrárias.

Vamos procurar a solução da equação (33) sob a forma

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n, \qquad (34)$$

onde $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ são funções de x, por enquanto desconhecidas. Para as determinar obtém-se o sistema

$$\begin{cases} y_1C_1' + y_2C_2' + \cdots + y_nC_n' = 0, \\ y_1'C_1' + y_2'C_2' + \cdots + y_n'C_n' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(n-1)}C_1' + y_2^{(n-1)}C_2' + \cdots + y^{(n-1)}C_n' = f(x). \end{cases} \qquad (35)$$

Resolvendo este sistema em ordem a $C_i'(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, obtém-se

$$\frac{dC_i}{dx} = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

logo,

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\,dx + \tilde{C}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

onde C_i são constantes arbitrárias. Introduzindo em (34) os valores calculados de $C_i(x)$, obtém-se a solução geral da equação (33).

Em particular, para a equação de segunda ordem

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x),$$

o sistema (35) adquire a forma

$$\begin{cases} y_1C_1' + y_2C_2' = 0, \\ y_1'C_1' + y_2'C_2' = f(x). \end{cases} \tag{36}$$

Resolvendo o sistema (36) em ordem a C_1' e C_2', obtém-se

$$C_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W[y_1, y_2]}, \quad C_2' = \frac{y_1 f(x)}{W[y_1, y_2]},$$

donde se deduz que

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W[y_1, y_2]}\,dx + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = -\int \frac{y_1 f(x)}{W[y_1, y_2]}\,dx + \tilde{C}_2,$$

onde $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_2$ são as constantes de integração.

Observação. No caso da equação $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$, onde $a_0(x) \neq 1$, $a_0(x) \neq 0$, o sistema (36) terá a seguinte forma:

$$\begin{cases} y_1C_1' + y_2C_2' = 0, \\ y_1'C_1' + y_2'C_2' = \dfrac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

EXEMPLO 1. Calcular a solução geral da equação $xy'' + 2y' + xy = 0$, sabendo que uma solução particular sua é $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Resolução. Seja $y = \dfrac{\sin x}{x} \cdot z$, onde z é a nova função incógnita de x; então $y' = y_1' z + y_1 z'$, $y'' = y_1'' z + 2y_1' z + y_1 z''$.

Substituindo na equação dada, obtém-se

$$(xy_1'' + 2y_1' + xy_1)\, z + xy_1 z'' + (xy_1' + y_1)\, z' = 0.$$

Mas, uma vez que $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$ é uma solução particular da equação dada, satisfaz $xy'' + 2y' + xy = 0$, logo

$$xy_1 z'' + 2(xy_1' + y_1)\, z' = 0. \tag{37}$$

Mas $y_1' = \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\sin x}{x^2}$, logo $xy_1' + y_1 = \cos x$, pelo que a equação (37) adquire a forma

$$z'' + 2z' \cos x = 0.$$

E esta equação pode ser escrita sob a forma

$$\frac{z''}{z'} + 2\frac{\cos x}{\sin x} = 0.$$

Daqui obtém-se $(\ln|z'| + 2\ln|\sin x|)' = 0$, logo

$$\ln|z'| + 2\ln|\sin x| = \ln \tilde{C}_1 \quad \text{ou} \quad z' \sin x^2 = C.$$

Integrando esta equação, obtém-se $z = -C \operatorname{ctg} x + C$, pelo que a solução geral da equação dada é

$$y = -\tilde{C}_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x},$$

ou

$$y = C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x} \qquad (C_1 = -\tilde{C}_1).$$

EXEMPLO 2. Determinar a solução geral da equação $y'' + \dfrac{2}{x} y' + y = \dfrac{1}{x}$, $(x \neq 0)$.

Resolução. A solução geral da equação homogénea associada tem a forma (ver Exemplo 1):

$$y_h = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$$

pelo que o seu sistema fundamental de soluções é

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}, \qquad y_2 = \frac{\cos x}{x}.$$

Vamos procurar a solução geral da equação dada pelo método da variação das constantes arbitrárias:

$$y = C_1(x)\frac{\sin x}{x} + C_2(x)\frac{\cos x}{x},$$

onde $C_1(x)$ e $C_2(x)$ são funções de x, por enquanto desconhecidas, a determinar. O sistema do qual elas se determinam tem a forma

$$\begin{cases} C_1'(x)\dfrac{\sin x}{x} + C_2'(x)\dfrac{\cos x}{x} = 0, \\ C_1'(x)\dfrac{x\cos c - \sin x}{x^2} + C_2'(x) = \dfrac{-x\sin x - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Daqui obtém-se $C_1'(x) = \cos x$, $C_2'(x) = -\sin x$. Integrando, obtém-se

$$C_1(x) = \sin x + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = \cos x + \tilde{C}_2.$$

Substituindo estes valores de $C_1(x)$ e $C_2(x)$ na expressão de y, obtém-se a solução geral da equação dada

$$y = \tilde{C}_1\frac{\sin x}{x} + \tilde{C}_2\frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x}.$$

EXEMPLO 3. Resolver a equação $y'' + y = 1/\cos x$.

Resolução. A equação homogénea correspondente é $y'' + y = 0$. A sua equação característica $\lambda^2 + 1 = 0$ tem as raízes imaginárias $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$, e a solução geral da equação homogénea associada tem a forma

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Vamos procurar a solução geral da equação inicial sob a forma

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x, \tag{38}$$

onde $C_1(x)$ e $C_2(x)$ são funções incógnitas de x. Estas funções são determinadas mediante a resolução do sistema

$$\begin{cases} \cos x \cdot C_1'(x) + \sin x \cdot C_2'(x) = 0, \\ -\sin x \cdot C_1'(x) + \cos x \cdot C_2'(x) = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema em ordem a $C_1'(x)$ e $C_2'(x)$ obtém-se

$$C_1'(x) = -\mathrm{tg}\, x; \quad C_2'(x) = 1.$$

Integrando, chegamos à solução

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = x + \tilde{C}_2.$$

Substituindo as expressões de $C_1(x)$ e $C_2(x)$ em (38), obtém-se a solução geral da equação dada:

$$y = \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x\sin x.$$

O termo $\cos x \cdot \ln|\cos x| + x\sin x$ nesta expressão é uma solução particular da equação não homogénea dada.

EXEMPLO 4. Sabendo que o sistema fundamental de soluções da equação homogénea associada é $y = \ln x$, $y = x$, encontrar uma solução particular da equação

$$x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = \frac{(1 - \ln x)^2}{x}, \tag{39}$$

que satisfaça a condição $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$.

Resolução. Aplicando o método da variação das constantes, obtém-se a solução geral da equação (39):

$$y = C_1 \ln x + C_2 x + \frac{1 - 2\ln x}{4x}. \tag{40}$$

Quando $x \to \infty$, os dois primeiros termos do segundo membro de (40) tendem para infinito, e de tal modo que, para quaisquer valores de C_1 e C_2, não simultaneamente nulos, a função $C_1 \ln x + C_2 x$ é infinitamente grande quando $x \to +\infty$. O terceiro termo do segundo membro de (40) tende para zero quando $x \to +\infty$, o que é fácil de verificar, utilizando a regra de L' Hospital. Deste modo, a função $y = (1 - 2\ln x)/4x$, que se obtém de (40) quando $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$, é a solução da equação (39) que satisfaz a equação $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$.

Integre as seguintes equações diferenciais, conhecendo uma solução particular y da equação homogénea:

636. $(2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0$; $y_1 = e^{mx}$.

637. $(x^2 - x)y'' + (2x - 3)y' - 2y = 0$; y_1 é uma fracção racional, em cujo denominador figuram, como factores lineares, os divisores do coeficiente de y''.

638. $(3x + 2x^2)y'' - 6(1 - x)y' + 6y = 6$; y_1 é um polinómio.

639. $x^2(\ln x - 2x^2)y'' - xy' + y = 0;\ y_1 = x.$

640. $y'' + (\mathrm{tg}\, x - 2\,\mathrm{ctg}\, x)y' + 2\,\mathrm{ctg}^2 x \cdot y = 0;\ y_1 = \sin x.$

641. $y'' + \mathrm{tg}\, x \cdot y' + \cos^2 x \cdot y = 0;\ y_1 = \cos(\sin x).$

642. $(1 + x^2)y'' + xy' - y + 1 = 0;\ y_1 = x.$

643. $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4;\ y_1 = 1/x.$

644. $(x^2 - 1)y'' - xy' + y = (x - 1)2e^x;\ y_1 = e^x.$

645. $y'' + y' + e^{-2x}y = e^{-3x};\ y_1 = \cos e^{-x}.$

646. $(x^4 - x^3)y'' + (2x^3 - 2x^2 - x)y' - y = \dfrac{(x-1)^2}{x};\ y_1 = \dfrac{1}{x}.$

647. $y'' - y' + ye^{2x} = xe^{2x} - 1;\ y_1 = \sin e^x.$

648. $x(x - 1)y'' - (2x - 1)y' + 2y = x^2(2x - 3);\ y_1 = x^2.$

649. Uma corrente com 6 m de comprimento escorrega duma mesa sem atrito. Se o movimento teve início quando 1 m da corrente pendia para fora da mesa, quanto tempo demora até que toda a corrente esteja fora da mesa?

650. Deduzir a equação do movimento de um ponto, sabendo que a aceleração se exprime através do tempo pela função $a = 1{,}2\,t$ e que o espaço percorrido s é 0, quando $t = 0$, e $s = 20$, quando $t = 5$.

651. Um corpo de massa m desliza por um plano horizontal, sob a acção de um impulso, que lhe imprimiu uma velocidade inicial v_0. O corpo está sujeito a uma força de atrito, de intensidade $-km$. Determinar a distância que o corpo pode percorrer.

652. Um ponto material de massa $m = 1$ desloca-se em linha recta, aproximando-se de um centro que o repele com uma força igual a k^2x (onde x é a distância até ao centro). Quando $t = 0$, verifica-se $x = a$, $dx/dt = ka$. Determinar a lei do movimento.

Utilizando o método da variação das constantes, integre as seguintes equações:

653. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}.$

654. $y'' - y = \dfrac{1}{e^x + 1}.$

655. *a*) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x};$

b) $y'' + y = \mathrm{ctg}\, x;$

c) $y'' + y = \mathrm{tg}\, x.$

656. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}.$

657. $y'' - 2y' = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}.$

658. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}.$

659. $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^3 x}.$

660. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x.$

661. $y''' + y'' = \dfrac{x - 1}{x^2}.$

662. $xy'' - (1 + 2x^2)y' = 4x^3 e^{x^2}.$

663. $y'' - 2y' \cdot \mathrm{tg}\, x = 1.$

664. $x \ln x \cdot y'' - y' = \ln^2 x.$

665. $xy'' + (2x - 1)y' = -4x^2.$

666. $y'' + y' \,\mathrm{tg}\, x = \cos x\, \mathrm{ctg}\, x.$

Calcule as soluções das seguintes equações diferenciais que satisfazem as condições dadas, quando $x \to \infty$:

667. $4xy'' + 2y' + y = 1,\ \lim\limits_{x \to +\infty} y = 1;$

$y_1 = \sin\sqrt{x},\ y_2 = \cos\sqrt{x}.$

668. $4xy'' + 2y' + y = \dfrac{6 + x}{x^2},\ \lim\limits_{x \to +\infty} y = 0.$

669. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = \dfrac{1}{1 + x^2},\ \lim\limits_{x \to +\infty} y = \dfrac{\pi^2}{8};$

$y'|_{x=0} = 0.$

670. $(1 - x^2)y'' + xy' - y = (x - 1)^2 e^x,\ \lim\limits_{x \to -\infty} y = 0;$

$y'|_{x=0} = 1;\ y_1 = x,\ y_2 = e^x.$

671. $2x^2(2 - \ln x)y'' + x(4 - \ln x)y' - y = \dfrac{(2 - \ln x)^2}{\sqrt{x}},$

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0,\ y_1 = \ln x,\ y_2 = \sqrt{x}.$

672. $y'' + \frac{2}{x}y' - y = 4e^x$, $\lim_{x\to-\infty} y = 0$; $y'\big|_{x=-1} = -\frac{1}{e}$

$y_1 = \frac{e^x}{x}$, $y_2 = \frac{e^{-x}}{x}$.

673. $x^3(\ln x - 1)y'' - x^2y' + xy = 2\ln x$, $\lim_{x\to+\infty} y = 0$, $y_1 = x$, $y_2 = \ln x$.

674. $(x^2 - 2x)y'' + (2 - x^2)y' - 2(1 - x)y = 2(x - 1)$, $\lim_{x\to+\infty} y = 1$, $y_1 = x^2$, $y_2 = e^x$.

6.º Dedução de uma equação diferencial pelo sistema fundamental de soluções.

Consideremos um sistema de funções, linearmente independentes no segmento $[a, b]$:

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \tag{41}$$

cujas derivadas existem até à ordem n, inclusive. Então a equação

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \ldots y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \ldots y_n'(x) & y'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) \ldots y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0, \tag{42}$$

onde $y(x)$ é uma função incógnita, é uma equação diferencial linear, da qual as funções $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$, como é fácil verificar, constituem o sistema fundamental de soluções. O coeficiente de $y^{(n)}(x)$ nesta equação diferencial é o determinante de Vronski do sistema (41).

Os pontos onde este determinante se anula são os pontos singulares da equação obtida, uma vez que nestes pontos se anula o coeficiente da derivada $y^{(n)}(x)$.

EXEMPLO 1. Deduzir a equação linear, cujo sistema fundamental de soluções é constituído pelas funções $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$.

Resolução. Aplicando a fórmula (42) obtém-se

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & y' \\ 1 & 1 & y'' \end{vmatrix} = 0. \tag{43}$$

Decompondo o determinante do primeiro membro de (43) pelos elementos da terceira coluna, obtém-se $y'' - y = 0$. É esta a equação diferencial procurada.

EXEMPLO 2. Deduzir a equação linear, cujo sistema fundamental de soluções é constituído pelas funções $y_1(x) = e^{x^2}$, $y_2(x) = e^{-x^2}$.

Resolução. Escrevamos a equação (42) para este caso:

$$\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} & y \\ 2x\,e^{x^2} & -2x\,e^{-x^2} & y' \\ (2+4x^2)\,e^{x^2} & (4x^2-2)\,e^{-x^2} & y'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 2x & -2x & y' \\ 2+4x^4 & 4x^2-2 & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Decompondo este último determinante pelos elementos da terceira coluna, obtemos

$$xy'' - y' - 4xy = 0.$$

Neste exemplo, o wronskiano $W[y_1, y_2] = -4x$ anula-se quando $x = 0$. Recorde-se que, de acordo com a teoria geral, o wronskiano do sistema fundamental de soluções da equação diferencial linear homogénea

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0,$$

com coeficientes contínuos no intervalo $[a, b]$, não se anula em nenhum ponto x deste intervalo. O facto de, neste caso, o wronskiano se anular quando $x = 0$, não contradiz essa teoria, uma vez que, se escrevermos a equação (44) sob a forma

$$y'' - \frac{1}{x}y' - 4x^2y = 0, \tag{45}$$

verificamos que o coeficiente de y' é descontínuo quando $x = 0$, de tal modo que não é satisfeita a condição de continuidade dos coeficientes da equação (45).

Deduza as equações diferenciais, cujos sistemas fundamentais de soluções são os seguintes:

675. $y_1(x) = \operatorname{sh} x$, $y_2(x) = \operatorname{ch} x$.

676. $y_1(x) = x$, $y_2(x) = e^x$.

677. $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{x^2/2}$.

678. $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = x^2$.

679. $y_1(x) = x$, $y_2(x) = \sin x$, $y_3(x) = \cos x$.

7.º Problemas diversos.

Seja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ o sistema fundamental da equação linear homogénea

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0.$$

Então é valida a fórmula de Liouville-Ostrogradski:

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\,dt},$$

onde $W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ é o wronskiano e x_0 é qualquer ponto do intervalo $[a, b]$, no qual são contínuos os coeficientes $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ da equação.

EXEMPLO 1. Mostre que a equação diferencial linear $xy'' - (x + 2)y' + y = 0$ tem uma solução com a forma $y_1(x) = P(x)$, onde $P(x)$ é um polinómio. Mostre que a segunda solução y_2 desta equação tem a forma $y_2 = e^x Q(x)$, onde $Q(x)$ também é um polinómio.

Resolução. Vamos procurar a solução $y_1(x)$ sob a forma de um polinómio de primeiro grau, por exemplo: $y_1(x) = Ax + B$. Substituindo na equação, obtém-se $-2A + B = 0$. Seja $A = 1$, então $B = 2$; deste modo, o polinómio $y = x + 2$ é uma solução da equação dada. Vamos escrever de novo a equação dada sob a forma

$$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{1}{x} = 0.$$

Seja $y_2(x)$ a segunda solução particular da equação dada, linearmente independente da primeira. Calculemos o wronskiano do sistema de soluções $y_1 = x + 2$, y_2:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} x+2 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = (x+2)y_2' - y_2,$$

onde $x \neq -2$. Aplicando a fórmula de Liouville-Ostrogradski, obtém-se

$$(x+2)y_2' - y_2 = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} \frac{t+2}{t}\,dt},$$

onde x_0 é qualquer valor de x, tal que $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq -2$; ou ainda

$$(x+2)y_2' - y_2 = Ax^2 e^x,$$

onde $A = \dfrac{W(x_0)\, e^{-x_0}}{x_0^2} = \text{const.}$

Obtivemos assim uma equação diferencial de primeira ordem, da qual se pode determinar y_2. Dividindo ambos os membros desta equação por $(x + 2)^2$, ela fica reduzida à forma

$$\left(\frac{y_2}{x+2}\right)' = A\frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}.$$

Integrando, obtém-se

$$\frac{y_2}{x+2} = A\frac{x-2}{x+2}e^x;\ \text{logo, } y_2 = A(x-2)\,e^x.$$

680. Mostre que a equação diferencial linear $(x^2 - 1)y'' = 2y$ tem como solução um certo polinómio $y_1(x) = P(x)$. Mostre que a segunda solução $y_2(x)$ desta equação tem a forma

$$y_2(x) = P(x)\ln\frac{x+1}{x-1} + Q(x),$$

onde $Q(x)$ também é um polinómio.

681. Determine a solução geral da equação diferencial linear de segunda ordem $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$, sendo conhecida uma solução particular $y_1 = y_1(x)$.

682. Seja $y_1(x), y_2(x)$ o sistema fundamental de soluções da equação diferencial linear de segunda ordem $p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$. Exprima os coeficientes $p_0(x)$, $p_1(x)$ e $p_2(x)$ em função de $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

683. Mostre que se duas soluções da equação $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$, com coeficientes contínuos, tiverem o máximo no mesmo ponto x, então essas soluções são linearmente dependentes.

684. Mostre que o quociente de duas soluções linearmente independentes da equação $y'' + p_1y' + p_2y = 0$ (onde p_1 e p_2 são constantes) não pode ter pontos de máximo local.

685. Para que valores de p_1 e p_2 cada solução da equação $y'' + p_1y' + p_2y = 0$ (onde p_1 e p_2 são constantes) se anula numa infinidade de pontos x?

686. Sejam $u(x)$ e $v(x)$ soluções das equações $u'' + p(x)u = 0$ e $v'' + q(x)v = 0$, respectivamente, que satisfazem as condições $u(a) = 0$, $v(a) = 0$, sendo $p(x)$ e $q(x)$ funções contínuas em $[a, b]$. Mostre que o wronskiano destas soluções tem a forma

$$W[u(x), v(x)] = \int_a^x [p(t) - q(t)]\, u(t)\, v(t)\, dt.$$

687. Mostre que duas soluções linearmente independentes $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da equação linear homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ não podem anular-se no mesmo ponto x_0.

688. Mostre que, se $y_1(x)$ for uma solução particular da equação linear homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, tal que $y_1(x) \not\equiv 0$, então a equação $y_1(x) = 0$ não pode ter raízes múltiplas.

689. Mostre que a substituição $y = v(x)\,z(x)$ transforma a equação linear homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ numa equação de novo linear. Que forma deve ter a função $v(x)$, para que na equação transformada desapareça o termo com a primeira derivada?

690. Mostre que a solução da equação $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 + k^2x = f(t)$, que satisfaz as condições iniciais $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, tem a forma

$$x(t) = \frac{1}{k}\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\,\mathrm{d}u.$$

691. Para que valores de p e q todas as soluções da equação $y'' + py' + qy = 0$ tendem para 0 quando $x \to \infty$?

692. Para que valores de p e q todas as soluções da equação $y'' + py' + qy = 0$ (p, q = const.) são funções periódicas de x?

693. Seja $y(x)$ uma solução da equação $(1 + x^2)y'' - x^2y' = x^2 + 4$, no intervalo $[a, b]$, que satisfaz as condições de fronteira $y(a) = 0$, $y(b) = 0$. Mostre que, para qualquer x do intervalo (a, b), se verifica $y(x) < 0$.

694. Mostre que, no caso de $q(x) < 0$, as soluções da equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ não podem ter máximos positivos.

695. Mostre que, no caso de $q(x) > 0$, para qualquer solução $y(x)$ da equação $y'' + q(x)y = 0$, o quociente $y'(x)/y(x)$ decresce, quando x aumenta, num intervalo onde $y(x) \neq 0$.

16. O MÉTODO DAS ISOCLINAS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

O método das isoclinas também pode ser aplicado à resolução de certas equações de segunda ordem. Trata-se daquelas equações que podem ser reduzidas a equações de primeira ordem, por exemplo, as equações do tipo

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + f\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\, x\right) = 0. \qquad (1)$$

Introduzamos a nova variável $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Então $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ e a equação (1) adquire a forma

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{f(v, x)}{v}. \qquad (2)$$

Esta última equação é de primeira ordem, tem x como variável independente e pode ser resolvida pelo método das isoclinas. Vamos interpretar a grandeza x como a deslocação de um certo ponto do sistema, e $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v$, como a sua velocidade.

O plano das variáveis x, v designa-se plano de fase. Deste modo, a equação (2) determina a velocidade como função da deslocação. Se construirmos o campo das isoclinas da equação (2), podemos esboçar qualquer curva integral, desde que seja dado um ponto inicial (x_0, v_0). Esta representação gráfica da velocidade v como função da deslocação x designa-se retrato de fase. As curvas do plano x, v, que representam estas funções designam-se trajectórias de fase.

Os valores instantâneos de x e v são as coordenadas dos pontos da trajectória de fase. Cada um destes pontos designa-se ponto representativo. Com o decorrer do tempo, o ponto de fase desloca-se ao longo da trajectória de fase. Note-se que uma velocidade positiva leva ao aumento da deslocação com o tempo.

Efectivamente, em consequência da substituição $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, quando $v > 0$, também $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t > 0$, o que significa que x cresce quando t aumenta. Deste modo, no semiplano superior do plano de fase, onde $v > 0$, o ponto representativo desloca-se da esquerda para a direita, enquanto no semiplano inferior, onde $v < 0$, se desloca da direita para a esquerda. Deste modo, o movimento ao longo da trajectória de fase realiza-se no sentido dos ponteiros do relógio.

EXEMPLO 1. Construir a trajectória da seguinte equação no plano de fase:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x = 0. \qquad (3)$$

Resolução. Seja $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v$. A equação (3) adquire a forma

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + x = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{v}. \qquad (4)$$

As equações das isoclinas de (4) são $-x/v = k$. Construindo as isoclinas que correspondem a diferentes valores de k, verifica-se que as trajectórias de fase são circunferências de centro no ponto (0, 0) (Fig. 26).

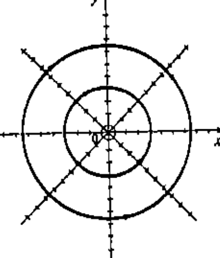


Fig. 26

Note-se que as trajectórias de fase fechadas correspondem a movimentos periódicos. É fácil verificar que, no caso da equação (3) temos, de facto, um movimento periódico. Resolvendo a equação (3) pelo método acima descrito, obtém-se

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

EXEMPLO 2. Construa as trajectórias de fase da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

Resolução. Seja $v = dx/dt$. Então a equação (5) adquire a forma

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v-x}{v}.$$

A equação das isoclinas é $\frac{v-x}{v} = k$. As trajectórias de fase têm a forma de espirais que se desenrolam (Fig. 27). Pelo retrato de fase pode verificar-se que o movimento é aperiódico, pois a sua amplitude cresce ilimitadamente com o tempo.

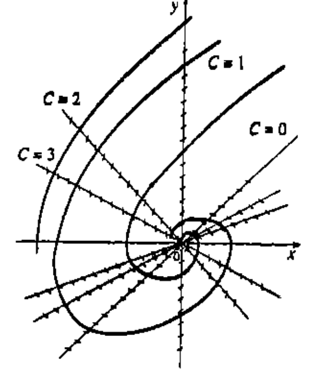


Fig. 27

Construa as trajectórias de fase das seguintes equações diferenciais:

696. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0.$

697. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 6x = 0.$

698. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0.$

699. $\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x = 0.$

700. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$

701. $\frac{d^2x}{dt^2} - x \cdot \exp\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$ $(\exp u \equiv e^u)$.

702. $\frac{d^2x}{dt^2} + \exp\left(-\frac{dx}{dt}\right) - x = 0.$

703. $\frac{d^2x}{dt^2} + x\left(-\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0.$

704. $\frac{d^2x}{dt^2} + x(x+2)\frac{dx}{dt} = 0.$

705. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + x - x^2 = 0.$

17. PROBLEMAS DE VALORES DE FRONTEIRA

Para simplificar, consideremos a equação de segunda ordem

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0. \quad (1)$$

Vamos supor os coeficientes $p_1(x)$ e $p_2(x)$ contínuos num certo intervalo (a, b). Então cada solução da equação (1) está definida em todo este intervalo. No que se segue, em vez da equação (1) vamos considerar uma equação do tipo

$$[p(x)y']' + q(x)y = 0, \ p(x) > 0. \quad (2)$$

As equações (1) e (2) podem ser transformadas uma na outra. As equações com a forma (2) dizem-se auto-adjuntas.

A solução da equação (2) pode ser inteiramente definida pelas condições iniciais $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$. No entanto, em muitos problemas da Física torna-se necessário procurar soluções, definidas de outro modo. O problema pode, por exemplo, ser formulado do seguinte modo: determinar a solução da equação (2) que, nos pontos a e b, toma dados valores $y(a)$ e $y(b)$. Geralmente, nesses casos os valores da solução são procurados apenas no intervalo (a, b) (domínio de base). Sendo assim, os valores de $y(a)$ e $y(b)$ dados encontram-se nas extremidades do intervalo, pelo que os problemas deste tipo se designam problemas de valores de fronteira. Daqui em diante, tomaremos como domínio de base o intervalo $(0, \pi)$, o que não reduz a generalidade dos raciocínios.

A forma mais geral das condições de fronteira para uma equação de segunda ordem é a seguinte:

$$h_0 y(0) + h_1 y'(0) = A, \ \ k_0 y(\pi) + k_1 y'(\pi) = B, \quad (3)$$

onde h_0, h_1, k_0, k_1, A e B são constantes dadas, tais que h_0, h_1, k_0 e k_1 não se anulam simultaneamente.

Se $A = B = 0$, as condições de fronteira dizem-se homogéneas, por exemplo:

1) $y(0) = y(\pi) = 0$,
2) $h_0 y(0) = y'(0),\ y'(\pi) = -h_1 y(\pi)\ ;\ h_0, h_1 > 0$,
3) $y'(0) = y'(\pi) = 0$,
4) $y(0) = y(\pi),\ y'(0) = y'(\pi)$.

De um modo geral, os problemas de valores de fronteira nem sempre são solúveis, isto é, nem sempre existe uma solução que tome os valores dados nas extremidades do intervalo. Por exemplo, o problema de valores de fronteira

$$y'' = 0,\ y(0) - y(\pi) = 1,\ y'(0) + y'(\pi) = 0$$

não tem nenhuma solução. O problema

$$y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = y(\pi) = 0, \tag{4}$$

só tem solução não trivial se $\sqrt{\lambda}$ for um número inteiro. Na realidade, da solução geral da equação diferencial (4)

$$y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

resulta que as condições de fronteira podem ser satisfeitas se e só se λ for o quadrado de um número inteiro n. As soluções correspondentes são as funções $y_n = \sin nx$.

Como se vê por este exemplo, se o valor q da equação (2) for função de um certo parâmetro λ, sob certas condições, existem valores de λ para os quais o problema de valores de fronteira homogéneo para a equação (2) tem solução não nula. Estes valores λ chamam-se valores próprios, enquanto as soluções correspondentes do problema de valores de fronteira se designam funções próprias. O valor destas últimas fica dependente de um factor constante arbitrário. Assim, por exemplo, no caso do problema de valores de fronteira $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = y(\pi) = 0$, os números $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$, e as funções $\sin x$, $\sin 2x, \ldots$, são, respectivamente, os valores próprios e as funções próprias do problema.

Além dos valores próprios simples, quando a um valor próprio corresponde uma única função própria (definida até à multiplicação por um factor constante), existem os valores próprios múltiplos, caso em que ao mesmo valor próprio correspondem duas ou mais funções próprias independentes.

Ao resolver problemas de valores de fronteira (para equações diferenciais lineares homogéneas) procura-se a solução geral da equação diferencial

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

onde $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ são soluções linearmente independentes. Depois exige-se que a função $y(x)$ satisfaça as condições de fronteira dadas. Isto conduz a um certo sistema de equações lineares donde se determinam os coeficientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Caso seja possível resolver este sistema, a sua solução dá-nos também a solução do problema de valores de fronteira. No caso de estarmos perante um problema de valores próprios, a condição de existência de solução não nula do sistema linear (que define $C_1, C_2, \ldots, C_n$) é também a condição donde se determinam os valores próprios. Esta condição traduz-se numa certa equação em λ, que pode ser transcendente.

EXEMPLO 1. Resolver o problema de valores de fronteira

$$y'' - y = 0,\ y'(0) = 0,\ y(1) = 1.$$

Resolução. A solução geral da equação dada é

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \tag{5}$$

logo

$$y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x}. \tag{6}$$

Substituindo $x = 0$ em (6) e $x = 1$ em (5), e entrando em conta com as condições de fronteira, obtém-se o seguinte sistema linear não homogéneo, donde se podem determinar os coeficientes C_1 e C_2:

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0, \\ C_1 e + C_1 e^{-1} = 1. \end{cases}$$

O determinante deste sistema é

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e & e \end{vmatrix} = e^{-1} + e = 2\,\mathrm{ch}\,1 \neq 0;$$

logo, a sua solução é única:

$$C_1 = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,1},\quad C_2 = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,1}.$$

Substituindo em (5) os valores de C_1 e C_2 assim obtidos, determina-se a solução do problema de valores de fronteira considerado:

$$y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2\,\mathrm{ch}\,1},\quad \text{ou}\quad y(x) = \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,1}.$$

EXEMPLO 2. Calcular os valores próprios e as funções próprias do seguinte problema de valores de fronteira:

$$y'' + \lambda^2 y = 0 \ (\lambda \neq 0), \tag{7}$$

$$y'(0) = 0, \ y(\pi) = 0. \tag{8}$$

Resolução. A solução geral da equação (7) é

$$y(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x; \tag{9}$$

logo,

$$y'(x) = -C_1 \lambda \sin \lambda x + C_2 \lambda \cos \lambda x. \tag{10}$$

Substituindo $x = \pi$ em (9) e $x = 0$ em (10) e entrando em conta com as condições de fronteira, obtém-se o seguinte sistema linear homogéneo em ordem a C_1 e C_2:

$$\begin{cases} C_1 \cos \lambda\pi + C_2 \sin \lambda\pi = 0, \\ C_2 \lambda = 0. \end{cases} \tag{11}$$

O sistema (11) tem soluções não nulas se e só se o seu determinante for igual a zero. Igualando o determinante a zero, obtém-se uma equação da qual se determinam os valores próprios do problema de valores de fronteira:

$$\begin{vmatrix} \cos \lambda\pi & \sin \lambda\pi \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ ou } \lambda \cos \lambda\pi = 0.$$

Uma vez que $\lambda \neq 0$; por hipótese, resulta $\cos \lambda\pi = 0$, pelo que os valores próprios são

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2n+1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

A estes valores correspondem as seguintes funções próprias (o factor constante arbitrário, C_1, neste caso, foi considerado igual a 1):

$$y_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2} x.$$

Estas funções são as soluções do problema de valores de fronteira (7)-(8).

Observação. Os valores próprios dos problemas acima considerados formam uma sucessão numérica crescente. Se os coeficientes da equação diferencial tiverem um ponto singular na fronteira do domínio de base, ou se o domínio de base for infinito, por exemplo, todo o eixo real, então o espectro, isto é, o conjunto dos valores próprios, pode ter uma estrutura diferente. Em particular, encontram-se espectros que contêm todos os números de um certo intervalo de valores λ, os chamados espectros contínuos. Suponhamos, por exemplo, que se pretende resolver a equação $y'' + \lambda y = 0$ no intervalo $-\infty < x < \infty$ com as seguintes condições de fronteira: $y(x)$ é limitado no infinito. É evidente que, neste caso, qualquer valor não negativo de λ é valor próprio, sendo as funções próprias correspondentes $\sin\sqrt{\lambda}x$ e $\cos\sqrt{\lambda}x$.

Ao resolver problemas da física matemática, que conduzem a problemas de valores próprios, é frequente obterem-se equações diferenciais do tipo

$$[p(x)y']' - q(x)y + \lambda(x)y = 0,$$

tais que nas extremidades do domínio de base podem apresentar singularidades, por exemplo, o coeficiente $p(x)$ pode anular-se. Da própria natureza do problema resultam condições a impor nestes pontos singulares, por exemplo, a existência de solução contínua ou limitada ou ainda que a solução seja infinitamente grande de uma certa ordem. Estas condições desempenham o papel de condições de fronteira.

Um exemplo típico desta situação é a equação de Bessel

$$(xy')' - \frac{n^2}{x} y + \lambda xy = 0, \tag{12}$$

que surge nos problemas da física matemática. Neste caso, $p(x) = x$ e a suposição, acima aceite, de que $p(x) > 0$, não se verifica em todo o domínio de base $0 \leq x \leq 1$, uma vez que $p(0) = 0$. O ponto $x = 0$ é um ponto singular da equação de Bessel.

A condição de que a solução seja limitada neste ponto é uma condição de fronteira especial para a equação de Bessel: determinar uma solução da equação (12) que seja limitada quando $x = 0$ e que se anule, por exemplo, quando $x = 1$.

EXEMPLO 3. Resolver o problema de valores de fronteira $xy'' + 2xy' - 6y = 0$; $y(1) = 1$; $y(x)$ é limitada quando $x \to 0$.

RESOLUÇÃO. A equação dada é uma equação de Euler. A sua solução geral tem a forma $y(x) = C_1/x^3 + C_2x^2$. Por condição, a solução tem de ser limitada quando $x \to 0$. Esta exigência será satisfeita se na solução geral fizermos $C_1 = 0$. Então teremos $y(x) = C_2x^2$. Da condição de fronteira $y(1) = 1$ resulta que $C_2 = 1$. Por conseguinte, a solução procurada é $y = x^2$.

706. Para que valores de λ a equação $y'' + \lambda y = 0$ tem uma solução não trivial que satisfaz as condições

a) $y'(0) = y'(\pi) = 0$, *b)* $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$?

707. Para que valores de λ o problema de valores fronteira $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$ admite a solução trivial $y \equiv 0$?

708. Qual dos seguintes problemas de valores de fronteira tem solução:

a) $y'' - y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y(2\pi) = 1,$

b) $y'' + y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y(2\pi) = 1?$

709. Resolva o problema de valores de fronteira $y'' + (\lambda - \omega^2)y = 0$, $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$. Considere separadamente os seguintes casos: $\lambda - \omega^2 > 0$, $\lambda - \omega^2 = 0$ e $\lambda - \omega^2 < 0$.

710. Determine a solução da equação $yy'' + (y'^2) + 1 = 0$ que passa pelos pontos (0, 1) e (1, 2).

Resolva os seguintes problemas de valores de fronteira:

711. $y'' + y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha.$

712. $y'' + y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) = 1.$

713. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(\pi) = e^{\pi}.$

714. $y'' + \alpha y' = 0,\ \ y(0) = e^{\alpha},\ \ y'(1) = 0.$

715. $y'' + \alpha^2 y' = 1,\ \ y'(0) = \alpha,\ \ y'(\pi) = 0 \quad (0 < \alpha < 1).$

716. $y'' + y = 1,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(\pi) = 0.$

717. $y'' + \lambda^2 y = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y'(\pi) = 0.$

718. $y'' + \lambda^2 y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(\pi) = 0.$

719. $y''' + y'' - y' - y = 0,\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 2,\ \ y(1) = 0.$

720. $y^{IV} - \lambda^4 y = 0,\ \ y(0) = y''(0) = 0,\ \ y(\pi) = y''(\pi) = 0.$

721. $xy'' + y' = 0,\ \ y(1) = \alpha y'(1),\ \ y(x)$ é limitado quando $x \to 0$.

722. $x^2 y^{IV} + 4xy''' + 2y'' = 0,\ \ y(1) = y'(1) = 0,\ \ y(x)$ é limitado quando $x \to 0$.

723. $x^3 y^{IV} + 6x^2 y''' + 6xy'' = 0,\ \ y(1) = y'(1) = 0,\ \ y(x)$ é limitado quando $x \to 0$.

18. INTEGRAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS POR DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE

1.° Desenvolvimento da solução em série de potências.

Esta técnica é útil sobretudo quando aplicada às equações diferenciais lineares. Para a ilustrar, tomemos como exemplo uma equação diferencial de segunda ordem.

Consideremos a equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

Suponhamos que os coeficientes $p(x)$ e $q(x)$ se podem desenvolver em séries de potências inteiras positivas de x, de tal modo que a equação (1) pode ser escrita sob a forma

$$y'' + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)y' + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)y = 0. \tag{2}$$

Vamos procurar a solução desta equação sob a forma de uma série de potências:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{3}$$

Substituindo esta expressão de y e as expressões correspondentes das suas derivadas em (2), obtém-se

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0. \tag{4}$$

Multiplicando as séries de potências, reunindo os termos semelhantes e igualando a zero os coeficientes de todas as potências do primeiro membro de (4), obtém-se a seguinte sucessão de equações:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 2\cdot 1c_2 + a_0c_1 + b_0c_0 = 0, \\ x^1 & 3\cdot 2c_3 + 2a_0c_2 + a_1c_1 + b_0c_1 + b_1c_0 = 0, \\ x^2 & 4\cdot 2c_4 + 3a_0c_3 + 2a_1c_2 + a_2c_1 + b_0c_2 + b_1c_1 = 0. \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{5}$$

Cada uma das equações (5) contém exactamente mais uma incógnita do que a anterior. Os coeficientes c_0 e c_1 mantêm-se indeterminados e desempenham o papel de constantes arbitrárias. Da primeira equação obtém-se c_2, da segunda c_3, da terceira c_4, etc. De um modo geral, se forem conhecidos $c_0, c_1, \ldots, c_{k+1}$, da $(k+1)$-ésima equação pode determinar-se c_{k+2}.

Na prática convém proceder do seguinte modo. Segundo o esquema acima descrito, determinam-se duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$, sendo $y_1(x)$ calculada com $c_0 = 1$ e $c_1 = 0$, enquanto $y_2(x)$ corresponde a $c_0 = 0$ e $c_1 = 1$, o que equivale às seguintes condições iniciais:

$$y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0,\ y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1.$$

Qualquer solução da equação (1) é uma combinação linear de $y_1(x)$ e $y_2(x)$.
Se as condições iniciais forem $y(0) = A$, $y'(0) = B$, teremos evidentemente $y = Ay_1(x) + By_2(x)$.
É válido o seguinte teorema.

TEOREMA. Se as séries

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{e} \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

convergirem quando $|x| < R$, então a série (3), construída do modo acima descrito, também converge para os mesmos valores de x e constitui uma solução da equação (1).

Em particular, se $p(x)$ e $q(x)$ forem polinómios em x, a série (3) converge, qualquer que seja x.

EXEMPLO 1. Calcular uma solução da equação

$$y'' - xy' - 2y = 0 \tag{6}$$

sob a forma de série de potências.

Resolução. Procuremos $y_1(x)$ sob a forma de série

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k; \text{ então}$$

$$y_1'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k x^{k-1},\quad y_1''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\, c_k x^{k-2}.$$

Substituindo y, y' e y'' em (6), obtém-se

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)\, k c_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0. \tag{7}$$

Reduzindo os termos semelhantes em (7) e igualando a zero os coeficientes de todas as potências de x, obtêm-se relações das quais se podem determinar sucessivamente $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$

Por uma questão de determinação, suponhamos que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Então verifica-se facilmente que

$$c_0 = 1,\ c_1 = 0. \tag{8}$$

Assim, temos

x^0	$2c_2 - 2c_0 = 0$, daqui e de (8) $c_2 = 1$,
x^1	$3 \cdot 2c_3 - 1 \cdot c_1 - 2c_1 = 0$, daqui e de (8) $c_3 = 0$,
x^2	$4 \cdot 3c_4 - 2c_2 - 2c_2 = 0$, logo $c_4 = \frac{1}{3}$,
x^3	$5 \cdot 4c_5 - 3c_3 - 2c_3 = 0$, logo $c_5 = 0$,
x^4	$6 \cdot 5c_6 - 4c_4 - 2c_4 = 0$, logo $c_6 = \frac{c_4}{5} = \frac{1}{3 \cdot 5}$,
	....

Por conseguinte,

$$y_1(x) = 1 + x^2 + \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{1}{15}x^6 + \cdots \tag{9}$$

Analogamente, se considerarmos

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \tag{10}$$

com as condições iniciais $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$, obtém-se

$$A_0 = 0,\ A_1 = 1. \tag{11}$$

Substituindo (10) em (6), obtém-se

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) A_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) A_k x^k = 0,$$

x^0	$2A_2 = 0$,	$A_2 = 0$,
x^1	$3 \cdot 2A_3 - 3A_1 = 0$,	$A_3 = \frac{1}{2}$,
x^2	$4 \cdot 3A_4 - 4A_2 = 0$,	$A_4 = 0$,
x^3	$5 \cdot 4A_5 - 5A_3 = 0$,	$A_5 = \frac{1}{2 \cdot 4}$,
x^4	$6 \cdot 5A_6 - 6A_4 = 0$,	$A_6 = 0$,
x^5	$7 \cdot 6A_7 - 7A_5 = 0$,	$A_7 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}$,
.		

É evidente que

$$A_{2k} = 0, \quad A_{2k+1} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2k)} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots):$$

Logo,

$$y_2(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2 \cdot 4} + \frac{x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2/2)^k}{k!} = xe^{x^2/2}. \tag{12}$$

A solução geral da equação (6) vai ter a forma

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são dados pelas fórmulas (9) e (12), respectivamente, sendo A e B constantes arbitrárias, com $y(0) = A$ e $y'(0) = B$.

Vamos descrever ainda outro método de integração de equações diferenciais por meio de desenvolvimento em séries, que se torna mais simples no caso de equações diferenciais não lineares. Consideremos a equação diferencial

$$y = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{13}$$

com as condições iniciais

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0, \; y'\Big|_{x=x_0} = y_0', \ldots, \; y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \tag{14}$$

Introduzamos a seguinte definição:

A função $\varphi(x)$ diz-se holomorfa numa certa vizinhança $\left|x_k - x_k^{(0)}\right| < \rho_k$ do ponto $x = x_0$ se nessa vizinhança ela puder ser representada sob a forma de série de potências

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

que convergem no domínio $\left|x - x_0\right| < \rho$.

Analogamente, a função $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diz-se holomorfa em ordem a todos os seus argumentos numa certa vizinhança $\left|x - x_0\right| < \rho_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ do ponto $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ se for representável sob a forma da série de potências

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum c_{k_1, k_2, \ldots, k_n} (x_1 - x_1^{(0)})^{k_1} (x_2 - x_2^{(0)})^{k_2} \ldots (x_n - x_n^{(0)})^{k_n},$$

convergente no domínio $\left|x - x_k^{(0)}\right| < \rho_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

TEOREMA. Se o segundo membro da equação (13) for holomorfo em ordem a todos os seus argumentos $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ numa vizinhança Ω do ponto $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$:

$$\left|x - x_0\right| < R, \; \left|y - y_0\right| < R_1, \; \left|y' - y_0'\right| < R_1, \ldots, \left|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}\right| < R,$$

então a equação (13) admite uma única solução

$$y(x) = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \; \left(a_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!}\right), \tag{15}$$

que satisfaz as condições iniciais (14) e é holomorfa numa certa vizinhança do ponto $x = x_0$.

A série (15) converge no domínio

$$\left|x - x_0\right| < \rho, \text{ onde } \rho = a\left[1 - e^{-\frac{b}{(n+1)aM}}\right];$$

sendo a e b constantes que satisfazem as condições $0 < a < R$, $0 < b < R$,

$$M = \max_{\Omega} \left| f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \right|.$$

Os primeiros $n + 1$ coeficientes da série (15) são determinados pelas condições iniciais (14) e pela equação diferencial (13). Os coeficientes seguintes são determinados a partir da equação diferencial (13), mediante a sua sucessiva diferenciação. Assim, temos, por exemplo,

$$a_{n+1} = \frac{y^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!},$$

onde

$$y^{(n+1)}\Big|_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} y^{(k+1)}\right)\Bigg|_{x=x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x=x_0} \cdot y_0' + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\Big|_{x=x_0} \cdot y^{(k+1)}(x_0).$$

Observação. Se a equação (15) for linear, isto é, se tiver a forma

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y = \psi(x),$$

onde $p_k(x)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ e $\psi(x)$ são funções holomorfas em todo o eixo $0x$, então a série (15) também converge em todo o eixo $0x$.

EXEMPLO 2. Determinar a solução da equação

$$y'' + y = 0 \tag{16}$$

que satifaz as condições iniciais

$$y|_{x=0} = 1, \; y'|_{x=0} = 0. \tag{17}$$

Resolução. Vamos procurar a solução particular da equação (16) que satisfaz as condições iniciais (17) sob a forma

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots, \tag{18}$$

onde $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Da equação diferencial determina-se que $y''(0) = -y(0) = -1$. Diferenciando sucessivamente ambos os membros da equação (16) e considerando $x = 0$ nas igualdades assim obtidas, temos

$$y'''(0) = -y'(0) = 0,$$
$$y^{IV}(0) = -y''(0) = 1,$$
$$\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 2k-1, \\ (-1)^k, & \text{se } n = 2k, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Os valores de $y''(0), y'''(0), \ldots$, assim calculados são substituídos na série (18). A solução procurada obtém-se então sob a forma de série de potências:

$$y(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \cdots. \tag{19}$$

Como é sabido, a série que figura no segundo membro da igualdade (19) converge em todo o eixo Ox para a função $y = \cos x$, a qual constitui a solução do problema de Cauchy considerado.

EXEMPLO 3. Determinar os quatro primeiros termos do desenvolvimento em série de Taylor da solução da equação $y'' = e^{xy}$ que satisfaz as condições iniciais $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$.

Resolução. Como facilmente se verifica, o segundo membro da equação, i.e. a função e^{xy}, desenvolve-se numa série de potências de x e de y, em torno do ponto (0, 0), que converge em todo o domínio $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ (i.e. o segundo membro é holomorfo).

Vamos procurar a solução sob a forma da série

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots. \tag{20}$$

Utilizando a própria equação, determina-se $y''(0) = e^{xy}|_{x=0} = 1$.

Diferenciando sucessivamente ambos os membros da equação e considerando $x = 0$ nas igualdades assim obtidas, temos

$$y'''(0) = (y + xy')\,e^{xy}|_{x=0} = 1,$$
$$y^{IV}(0) = [2y' + xy'' + (y + xy')^2]\,e^{xy}|_{x=0} = 1.$$

Substituindo na série (20) os valores obtidos de $y''(0)$, $y'''(0)$, $y^{IV}(0)$, obtém-se o desenvolvimento procurado da solução

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

Nos problemas que se seguem, calcular os três primeiros membros do desenvolvimento em série de potências da solução da equação diferencial dada que satisfaz as condições iniciais indicadas:

724. $y' = 1 - xy$, $\quad y|_{x=0} = 0$.

725. $y' = \dfrac{y - x}{y + x}$, $\quad y|_{x=0} = 1$.

726. $y' = \sin xy$, $\quad y|_{x=0} = 1$.

727. $y'' + xy = 0$, $\quad y|_{x=0} = 0$, $\quad y'|_{x=0} = 1$.

728. $y'' - \sin xy' = 0$, $\quad y|_{x=0} = 0$, $\quad y'|_{x=0} = 1$.

729. $xy'' + y \sin x = x$, $\quad y|_{x=\pi} = 1$, $\quad y'|_{x=\pi} = 0$.

730. $y'' \ln x - \sin xy = 0$, $\quad y|_{x=e} = e^{-1}$, $\quad y'|_{x=e} = 0$.

731. $y''' + x \sin y = 0$, $\quad y|_{x=0} = \pi/2$, $\quad y'|_{x=0} = 0$, $\quad y''|_{x=0} = 0$.

Por meio de desenvolvimento em série, integrar as seguintes equações diferenciais:

732. $y' - 2xy = 0,\ y(0) = 1.$ **733.** $y'' + xy' + y = 0.$

734. $y'' - xy' + y = 0,\ y(0) = y'(0) = 0.$

Nos problemas 735-738 calcular seis termos do desenvolvimento de $y(x)$ em série de potências.

735. $y'' - (1 + x^2)y = 0,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 2.$ **736.** $y'' = x^2y - y',\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

737. $y'' - ye^x = 0.$ **738.** $y' = e^y + xy,\ y(0) = 0.$

2.° Desenvolvimento da solução em série de potências generalizada. Equação de Bessel.

O ponto x_0 diz-se um ponto regular da equação diferencial

$$y'' + p(x)y + q(x)y = 0 \tag{21}$$

se os coeficientes $p(x)$ e $q(x)$ forem holomorfos nesse ponto; caso contrário, o ponto x diz-se um ponto singular da equação diferencial (21).

Uma série com a forma

$$x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0) \tag{22}$$

onde ρ é um número conhecido, sendo a série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ convergente num certo domínio $|x| < R$, denomina-se **série de potências generalizada.**

Se ρ for um número inteiro não negativo, então a série de potências generalizada (22) torna-se uma série de potências comum.

TEOREMA. Se o ponto $x = 0$ for um ponto singular da equação (21) e os coeficientes $p(x)$ e $q(x)$ da equação puderem ser representados sob a forma

$$p(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{x}, \quad q(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k}{x^2},$$

onde as séries dos numeradores são convergentes num certo domínio $|x| < R$ e os coeficientes a_0, b_0 e b_1 não são simultaneamente nulos, então a equação (21) tem, pelo menos, uma solução sob a forma de série de potências generalizada, a qual converge, pelo menos, no mesmo domínio $|x| < R$.

A fim de determinar o expoente ρ e os coeficientes c_k deve substituir-se a série (22) na equação (21), dividir ambos os membros por x^ρ e igualar a zero os coeficientes associados a cada potência de x (método dos coeficientes indeterminados).

Neste caso, o número ρ é determinado a partir da chamada equação indicial

$$\rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0 = 0, \tag{23}$$

onde

$$a_0 = \lim_{x \to 0} x\, p(x), \quad b_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x). \tag{24}$$

Sejam ρ_1 e ρ_2 as raízes da equação indicial (23). Distinguiremos três casos:

1. Se a diferença $\rho_1 - \rho_2$ não for igual a um número inteiro ou a zero, podem ser construídas duas soluções com a forma (22):

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0), \quad y_2 = x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \quad (A_0 \neq 0).$$

2. Se a diferença $\rho_1 - \rho_2$ for um número inteiro positivo, então, de um modo geral, só se pode construir uma série (solução da equação (21))

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{25}$$

3. Se a equação (23) tiver a raiz múltipla $\rho_1 = \rho_2$, então também se pode construir apenas uma série, a solução (25).

É claro que, no primeiro caso, as duas soluções construídas, $y_1(x)$ e $y_2(x)$, vão ser linearmente independentes (i.e. o seu quociente não é uma grandeza constante).

Quer no segundo, quer no terceiro caso, só foi possível construir uma solução. Note-se que, se a diferença $\rho_1 - \rho_2$ for um número inteiro positivo ou zero, então, além da solução (25), a equação (21) vai ter uma solução do tipo

$$y_2 = Ay_1(x)\ln x + x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{26}$$

Neste caso, a solução $y_2(x)$ contém mais um termo com a forma $Ay(x) \ln x$, onde $y(x)$ é dado na forma (25).

Observação. A constante A na fórmula (26) pode ser nula, obtendo-se nesse caso uma solução y_2 com a forma de uma série de potências generalizada.

EXEMPLO 4. Resolver a equação

$$2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0. \qquad (27)$$

Resolução. A equação (27) pode escrever-se de novo sob a forma

$$y'' + \frac{3x-2x^2}{2x^2}y' - \frac{x+1}{2x^2}y = 0$$

ou

$$y'' + \frac{3-2x}{2x}y' - \frac{x+1}{2x^2}y = 0.$$

Vamos procurar a solução $y(x)$ sob a forma

$$y(x) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0).$$

A fim de determinar ρ, escrevemos a equação indicial

$$\rho(\rho-1) + a_0\rho + b_0 = 0,$$

onde

$$a_0 = \lim_{x\to 0}\frac{3-2x}{2} = \tfrac{3}{2}, \quad b_0 = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x+1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2},$$

i.e., $\rho(\rho-1) + {}^3/_2\,\rho - {}^1/_2 = 0$, ou $\rho^2 + {}^1/_2\,\rho - {}^1/_2 = 0$; logo, $\rho_1 = {}^1/_2$, $\rho_2 = -1$.

De acordo com a regra indicada, obtém-se

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k, \quad (x>0); \quad y_2(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k.$$

Para calcular os coeficientes $C_0, C_1, \ldots, C_n$, devemos substituir $y_1(x)$ e as suas derivadas $y_1'(x)$ e $y_1''(x)$ na equação (27):

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\frac{1}{2}}, \quad y_1'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\tfrac{1}{2}\right)C_k x^{k-\frac{1}{2}}, \quad y_1''(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\left(k-\tfrac{1}{2}\right)C_k x^{k-\frac{3}{2}}.$$

Feita essa substituição, obtém-se

$$2x^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(k^2-\tfrac{1}{4}\right)C_k x^{k-\frac{3}{2}} + (3x-2x^2)\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\tfrac{1}{2}\right)C_k x^{k-\frac{1}{2}} - (x+1)\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\frac{1}{2}}. \qquad (28)$$

Depois de algumas transformações, a igualdade (28) toma a forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\,C_k x^{k+\frac{1}{2}} - \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1)\,C_k x^{k+\frac{3}{2}} = 0. \qquad (29)$$

Uma vez que se procura uma solução válida quando $x > 0$, pode dividir-se por $x^{1/2}$, o que nos dá

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(2k+3)\,C_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1)\,C_k x^{k+1} = 0. \qquad (30)$$

Daqui obtêm-se as relações donde se determinam os coeficientes:

$$\begin{array}{c|l} x_1 & 1\cdot 5C_1 - 2\cdot 1C_0 = 0, \\ x^2 & 2\cdot 7C_2 - 2\cdot 2C_1 = 0, \\ x^3 & 3\cdot 9C_3 - 2\cdot 3C_2 = 0, \\ . & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n & n(23+3)\,C_n - 2n - 2nC_{n-1} = 0, \\ . & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (31)$$

Substituindo $C_0 = 1$ na primeira das equações (31), obtém-se $C_1 = {}^2/_5$. Da segunda equação obtém-se $C_2 = {}^{2^2}/_{5\cdot 7}$. Da terceira, $C_3 = {}^{2^3}/_{5\cdot 7\cdot 9}$, etc. É fácil observar que

$$C_n = \frac{2^n}{5\cdot 7\cdot 9\ldots(2n+3)}\,(n = 1, 2, 3, \ldots);$$

logo,

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2x)^k}{5\cdot 7\cdot 9\ldots(2k+3)}\right]. \qquad (32)$$

Analogamente se determinam os coeficientes A_k. No caso de $A_0 = 1$, temos

$$A_1 = 1, \quad A_2 = \frac{1}{2!}, \quad \ldots, \quad A_k = \frac{1}{k!},$$

de tal modo que

$$y_2(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \quad \text{ou} \quad y_2(x) = \frac{e^x}{x}. \tag{33}$$

A solução geral da equação (27) é $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, onde A e B são constantes arbitrárias, sendo as funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dadas pelas fórmulas (32) e (33).

EXEMPLO 5. A interacção entre dois núcleos pode ser descrita com precisão através do potencial das forças mesónicas $V = Ae^{-\alpha x}/x$ (no caso de haver atracção, $A < 0$). Calcule, sob a forma de série, a solução da equação de onda de Schrödinger:

$$y'' + k\left(E - \frac{Ae^{-\alpha x}}{x}\right)y = 0, \tag{34}$$

onde α, A, E e $k = 2m/h$ são constantes (limite-se a obter três coeficientes não nulos da série correspondente à maior raiz da equação indicial).

RESOLUÇÃO. Procuraremos a solução da equação dada sob a forma de uma série de potências generalizada:

$$y(x) = x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k.$$

Os coeficientes A_0 e B_0 da equação indicial $\rho(\rho-1) + A_0\rho + B_0 = 0$ são: $A_0 = \lim_{x\to 0} xp(x) = 0$, uma vez que $p(x) \equiv 0$,

$$B_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = \lim_{x\to 0} x^2 k\left(E - \frac{Ae^{-\alpha x}}{x}\right) = \lim_{x\to 0} k\left(Ex^2 - ax\,e^{-\alpha x}\right) = 0,$$

de tal modo que adquire a forma $\rho(\rho-1) = 0$, donde $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$.

A série de potências generalizada no caso de $\rho = 1$ tem a forma

$$y(x) = x\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k = c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + \cdots; \tag{35}$$

logo,

$$y' = c_0 + 2c_1 x + 3c_2 x^2 + 4c_3 x^3 + \cdots,$$

$$y'' = 2c_1 + 6c_2 x + 12c_3 x^2 + \cdots.$$

Além disso, temos

$$e^{-\alpha x} = 1 - \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2!} - \frac{\alpha^3 x^3}{3!} + \frac{\alpha^4 x^4}{4!} - \cdots.$$

Substituindo na equação (34) as séries que representam y, y' e y'' obtém-se

$$2c_1 + 6c_2 x + 12c_3 x^2 + \cdots + \left[kE - kA\left(\frac{1}{x} - \alpha + \frac{\alpha^2 x}{2!} - \frac{\alpha^3 x^2}{3!} + \cdots\right)\right]\left(c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + \cdots\right) = 0.$$

Igualemos a zero os coeficientes de todas as potências de x:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 2c_1 - kAc_0 = 0, \\ x^1 & 6c_2 + (kE+\alpha)\,c_0 - kAc_1 = 0, \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Das igualdades obtidas determina-se, sucessivamente,

$$c_1 = \frac{Ak}{2}c_0, \quad c_2 = \frac{Akc_1 - (kE + \alpha A)\,c_0}{6}$$

ou

$$c_2 = \tfrac{1}{6}\left(\frac{A^2k^2}{2} - kE - \alpha kA\right)c_0, \text{ etc.}$$

Substituindo os valores calculados dos coeficientes na série (35), obtém-se

$$y(x) = c_0 x\left[1 + \frac{Ak}{2}x + \tfrac{1}{6}\left(\frac{A^2k^2}{2} - kE - \alpha kA\right)x^2 + \cdots\right],$$

onde c_0 é uma constante arbitrária.

Integre, por meio de desenvolvimento em série, as seguintes equações diferenciais:

739. $4xy'' + 2y' + y = 0.$

740. $(1+x)y' - ny = 0.$

741. $9x(1-x)y'' - 12y' + 4y = 0.$

742. A análise quântica do efeito de Stark (no sistema de coordenadas parabólicas) conduz à equação diferencial

$$\frac{d}{dx}(xy') + \left(\tfrac{1}{2}Ex + \alpha - \frac{m^2}{4x} - \tfrac{1}{4}Fx^2\right)y = 0,$$

onde α, E, F e m são constantes. Utilizando a maior raiz da equação indicial, calcular uma solução, sob a forma de série, numa vizinhança de $x = 0$ (determinar os três primeiros coeficientes).

743. Na ausência de dependência azimutal, a análise quântica do ião molecular de hidrogénio conduz à seguinte equação:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)y'\right] + (\alpha + \beta x^2)y = 0,$$

onde α e β são constantes. Calcular uma solução desta equação sob a forma de série (determinar os três primeiros coeficientes não nulos do desenvolvimento).

EXEMPLO 6. Resolver a equação de Bessel

$$xy'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad x > 0, \tag{36}$$

onde p é uma constante dada.

Resolução. Podemos escrever a equação (36) sob a forma

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2}y = 0.$$

Neste caso, $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = \frac{x^2 - p^2}{x^2}$, pelo que

$$a_0 = \lim_{x\to 0} xp(x) = 1, \; b = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = -p^2.$$

(Ver fórmulas (24).) Assim, a equação indicial tem a forma

$$(\rho - 1) + 1\rho - p^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \rho^2 - p^2 = 0,$$

donde $\rho_1 = p$, $\rho_2 = -p$.

Vamos procurar a primeira solução particular da equação de Bessel (36) sob a forma de uma série de potências generalizada $y = x^p \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$. Substituindo y, y' e y'' na equação (36), obtém-se

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} C_k (k+p)(k+p-1)x^{k+p-2} + x\sum_{k=0}^{\infty} C_k (k+p)x^{k+p-1} + (x^2 - p^2)\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+p} = 0,$$

ou, depois de algumas simples transformações e de dividir por x^p,

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+p)^2 - p^2]\,C_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+2} = 0.$$

Daqui, igualando a zero os coeficientes de todas as potências de x, obtém-se

$$\left.\begin{array}{l|l}
x^0 & (p^2 - p^2)C_0 = 0, \\
x^1 & [(1+p^2) - p^2]C_1 = 0, \\
x^2 & [(2+p)^2 - p^2]C_2 + C_0 = 0, \\
x^3 & [(3+p)^2 - p^2]C_3 + C_1 = 0, \\
x^4 & [(4+p)^2 - p^2]C_4 + C_2 = 0, \\
. & \dots\dots\dots\dots \\
x^k & [(k+p)^2 - p^2]C_k + C_{k-2} = 0, \\
. & \dots\dots\dots\dots
\end{array}\right. \tag{37}$$

A primeira das equações (37) é satisfeita para qualquer valor do coeficiente C_0. Da segunda equação resulta que $C_1 = 0$; da terceira, obtém-se

$$C_2 = -\frac{C_0}{(2+p)^2 - p^2} = -\frac{C_0}{2^2(1+p)};$$

da quarta, $C_3 = 0$; da quinta,

$$C_4 = -\frac{C_2}{(4+p)^2 - p^2} = \frac{C_0}{2^4(1+p)(2+p)\cdot 1\cdot 2}.$$

Torna-se evidente que todos os coeficientes de índice ímpar se anulam: $C_{2k+1} = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ Os coeficientes de índice par têm a forma

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k C_0}{2^{2k}(p+1)(p+2)\cdot(p+k)\cdot k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Para simplificar os passos que se seguem, admitamos que

$$C_0 = \frac{1}{2^p\,\Gamma(p+1)}, \tag{38}$$

onde $\Gamma(\nu)$ é a função Γ de Euler. A função Γ de Euler é definida para todos os valores positivos de x (bem como para todos os valores complexos com parte real positiva) pela seguinte fórmula:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu-1} dx.$$

A função Γ tem as seguintes importantes propriedades:

1. $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$.
2. $\Gamma(1) = 1$.

Se k for um inteiro positivo, então

3. $\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)\,\Gamma(\nu+1)$.
4. $\Gamma(k+1) = k!$

Utilizando a igualdade (38) e as propriedades da função Γ, podemos escrever o coeficiente C_{2k} sob a forma

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(p+1)(p+2)\cdots(p+k)\cdot k!\cdot 2^p\Gamma(p+1)} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}\cdot k!\,\Gamma(p+k+1)},$$

uma vez que, de acordo com a propriedade 3), $(p+1)(p+2)\cdots(p+k)\,\Gamma(p+1) = \Gamma(p+k+1)$. Assim, a solução particular da equação de Bessel, que vamos daqui em diante representar por J_p, tem a forma

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}. \tag{39}$$

Esta função é conhecida como função de Bessel de primeira espécie de ordem p.

Vamos agora procurar uma segunda solução particular da equação de Bessel sob a forma

$$y = x^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k,$$

onde p é a segunda raiz da equação indicial. É claro que esta solução pode ser obtida de (39), substituindo naquela fórmula p por $-p$, uma vez que p aparece na equação (36) com expoente par e, logo, a equação não se altera se aquele coeficiente for substituído pelo seu simétrico.

Assim, temos

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1-p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}.$$

Esta função é habitualmente designada função de Bessel de primeira espécie de ordem $-p$.

Se o número p não for inteiro, as funções $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$ são linearmente independentes, uma vez que os respectivos desenvolvimentos em série começam com diferentes potências de x e, por conseguinte, uma combinação linear $\alpha_2 J_p(x) + \alpha_2 J_{-p}(x)$ só pode ser nula se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Se p for um número inteiro, pode mostrar-se que as funções $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$ são linearmente dependentes; mais precisamente, verifica-se $J_n(x) = (-1)^n J_n(x)$ (com n inteiro).

Assim, no caso de p ser inteiro, temos de procurar, em vez de $J_{-p}(x)$, outra solução, que seja linearmente independente de $J_p(x)$. Com esse fim, definimos uma nova função

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}, \tag{40}$$

considerando, para começar, que p é um número não inteiro.

É evidente que a função $Y_p(x)$, definida deste modo, é solução da equação (36) (uma vez que ela é uma combinação linear das soluções particulares $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$).

Passando na igualdade (40) ao limite, quando p tende para um número inteiro, obtém-se uma solução $Y_p(x)$, linearmente independente de $J_p(x)$ é definida também para valores de p inteiros.

A função $Y_p(x)$ que acabamos de definir denomina-se função de Bessel de segunda espécie de ordem p. Deste modo, para qualquer valor de p, inteiro ou fraccionário, construímos um sistema fundamental de soluções da equação de Bessel (36). Daqui resulta que a solução geral daquela equação pode ser representada sob a forma

$$y = AJ_p(x) + BY_p(x),$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

No caso de p não ser inteiro, pode escrever-se a solução geral da equação de Bessel sob a forma

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x),$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

1.ª Observação. Na prática, encontra-se frequentemente a equação

$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - p^2)y = 0, \tag{41}$$

onde k é uma certa constante, $k \neq 0$. Esta equação pode ser reduzida à equação de Bessel

$$\xi^2 \frac{d^2y}{d\xi^2} + \xi\frac{dy}{d\xi} + (\xi^2 - p^2)y = 0 \tag{42}$$

através da substituição $\xi = kx$.

A solução geral da equação (42), no caso de p não ser inteiro, é

$$y = C_1 J_p(\xi) + C_2 J_p(\xi),$$

pelo que a solução geral da equação (41) será

$$y = C_1 J_p(kx) + C_2 J_{-p}(kx).$$

No caso de p ser inteiro, temos $y = C_1 J_p(kx) + C_2 Y_p(kx)$.

2.ª Observação. A vasta classe de equações do tipo

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + (b + cx^m)y = 0, \tag{43}$$

onde a, b, c e m são constantes ($c > 0$, $m \neq 0$), pode ser transformada através da introdução duma nova variável independente t e duma nova função u, definidas pelas fórmulas

$$y = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{-\alpha/\beta} u, \quad x = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{1/\beta}.$$

Obtém-se assim a equação de Bessel

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + (t^2 - p^2)u = 0,$$

onde

$$\alpha = \frac{a-1}{2}, \quad \beta = \frac{m}{2}, \quad \gamma = \frac{2\sqrt{c}}{m}, \quad p^2 = \frac{(a-1)^2 - 4b}{m^2}.$$

No caso de $c = 0$ ou $m = 0$, a equação (43) transforma-se numa equação de Euler.

EXEMPLO 7. Reduzir a equação

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (x^4 - 12)y = 0 \tag{44}$$

a uma equação de Bessel e determinar a sua solução geral.

Resolução. Neste caso, os coeficientes são $a = -3$, $b = -12$, $c = 1$, $m = 4$; logo,

$$\alpha = \frac{a-1}{2} = -2, \quad \beta = \frac{m}{2} = 2, \quad -\frac{\alpha}{\beta} = 1, \quad \frac{1}{\beta} = \tfrac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{2\sqrt{c}}{m} = \tfrac{1}{2}, \quad p^2 = \frac{(a-1)^2 - 4b}{m^2} = 4.$$

A nova variável independente t e a nova função u são dadas pelas fórmulas

$$y = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{-\alpha/\beta} u, \quad \text{ou } y = 2ut, \quad \text{onde } u = u(t), \tag{45}$$

$$x = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{-\alpha/\beta}, \quad \text{ou } x = \sqrt{2t}; \tag{46}$$

então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \sqrt{2t}\frac{d}{dt}(2ut) = 2\sqrt{2}\left(t^{3/2}\frac{du}{dt} + t^{1/2}u\right).$$

Analogamente se obtém

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4t^2\frac{d^2u}{dt^2} + 10t\frac{du}{dt} + 2u.$$

Substituindo na equação (44), x, y, dy/dx e d^2y/dx^2 pelas respectivas expressões através de t e u, obtém-se a equação de Bessel

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + (t^2 - 4)u = 0,$$

cuja solução geral é

$$u = C_1 J_2(t) + C_2 Y_2(t).$$

Passando às variáveis x e y segundo as fórmulas $t = x^2/2$ e $u = y/x^2$, as quais resultam de (45) e (46), obtém-se a solução geral da equação dada:

$$y = x^2\left[C_1 J_2\left(\frac{x^2}{2}\right) + C_2 Y_2\left(\frac{x^2}{2}\right)\right].$$

Determinar a solução geral das seguintes equações de Bessel:

744. $x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0.$ **745.** $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0.$

746. $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{9}y = 0.$ **747.** $y'' + \frac{1}{x}y' + 4y = 0.$

748. $x^2y'' - 2xy' + 4(x^4 - 1)y = 0.$ **749.** $y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0.$

750. $y'' + \frac{5}{x}y' + y = 0.$ **751.** $y'' + \frac{3}{x}y' + 4y = 0.$

3.° Determinação de soluções periódicas de equações diferenciais lineares.

Consideremos uma equação diferencial linear não homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$y'' + p_1y' + p_2y = f(x), \tag{47}$$

onde $f(x)$ é uma função periódica, de período 2π, que se desenvolve em série de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{48}$$

Vamos procurar uma solução periódica da equação (49) sob a forma

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx). \tag{49}$$

Substitui-se a série (49) na equação (47) e escolhem-se os seus coeficientes de tal modo que a igualdade (47) seja formalmente satisfeita. Igualando entre si os termos livres e os coeficientes associados a cos nx e a sin nx em ambos os membros da igualdade resultante, obtém-se

$$A_0 = \frac{a_0}{p_2}; \quad A_n = \frac{(p_2 - n^2)a_n - p_1nb_n}{(p_2 - n^2)^2 + p_1^2n^2};$$
$$B_n = \frac{(p_2 - n^2)b_n - p_1na_n}{(p_2 - n^2)^2 + p_1^2n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{50}$$

Da primeira das igualdades (50) resulta uma condição necessária para a existência de solução com a forma (49): se $a_0 \neq 0$, então é necessário que $p_2 \neq 0$. Substituindo (50) em (49), obtém-se

$$y(x) = \frac{a_0}{2p_2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(p_2 - n^2)a_n - p_1nb_n]\cos nx + [(p_2 - n^2)b_n + p_1na_n]\sin nx}{(p_2 - n^2)^2 + p_1^2n^2}. \tag{51}$$

Quando $p_1 = 0$ e $p_2 = n^2$, onde $n = 1, 2, \ldots$, só existe uma solução periódica sob a condição

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx = 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0. \tag{52}$$

Os coeficientes A_k e B_k, com $k \neq n$, são determinados pelas fórmulas (50), enquanto os coeficientes A_n e B_n se mantêm indeterminados, visto que A_n cos nx + B_n sin nx é a solução geral da equação homogénea associada.

Caso as condições (52) não sejam satisfeitas, a equação (47) não tem soluções periódicas (surge a ressonância). Sendo $p_2 = 0$ e $a_0 = 0$, o coeficiente A_0 mantém-se indeterminado e a equação (47) tem um conjunto infinito de soluções periódicas, que se distinguem entre si por uma parcela constante.

Se o segundo membro $f(x)$ da equação (47) tiver período $2l \neq 2\pi$, então $f(x)$ deve ser desenvolvida no período $2l$ e a solução deve ser procurada na forma

$$y = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi x}{l} + B_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Neste caso, as fórmulas (50) sofrem as alterações correspondentes.

EXEMPLO 8. Determinar as soluções periódicas da equação

$$y'' + 4y = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}.$$

Resolução. Temos $p_1 = 0, p_2 = 4 = 2^2, \ a_0 = 0, \ a_n = 0, \ b = 1/n^2 \quad (n = 3, 4, \ldots)$.

A função

$$f(x) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$$

não contém o termo de ressonância a_2 cos $2x$ + b_2 sin $2x$, logo, a equação tem soluções periódicas, que são em número infinito.

De acordo com as fórmulas (50), determinam-se os coeficientes

$$A_0 = A_n = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_n = \frac{1}{n^2(4 - n^2)}, \quad n = 3, 4, \ldots$$

Todas as soluções periódicas são dadas pela fórmula

$$y(x) = A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2(n^2 - 4)},$$

onde A_2 e B_2 são constantes arbitrárias.

EXEMPLO 9. Calcular as soluções periódicas da equação $y'' + y = \cos x$.

Resolução. No caso dado, $p = 0$, $p = 1$. Verifiquemos se as condições (52) se verificam. Temos

$$\int_0^{2\pi} \cos x \cos x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi \neq 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x \sin x \, dx = 0 \quad (\text{neste caso, } n = 1).$$

As condições (52) de existência de solução periódica não se verificam. Logo, a equação dada não tem soluções periódicas. Na realidade, a solução geral da equação $y'' + y = \cos x$ é

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + {}^1\!/_2\, x \sin x,$$

a qual, evidentemente, não é periódica, devido à presença do termo $^1\!/_2\, x \sin x$.

EXEMPLO 10. Calcular uma solução periódica da equação $y'' - y = |\sin x|$.

Resolução. A função $f(x) = |\sin x|$ é periódica de período π.
Vamos desenvolvê-la em série de Fourier no intervalo $(-\pi, \pi)$:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} \quad (-\pi, \pi).$$

Vamos procurar a solução da equação dada sob a forma

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx).$$

Temos

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -1, \quad a_0 = 4/\pi, \quad a_{2n-1} = 0, \quad a_{2n} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2 - 1}, \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

As fórmulas (50) dão-nos

$$A_0 = \frac{4}{\pi}, \quad A_{2n-1} = 0, \quad A_{2n} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{16n^2 - 1}, \quad B_n = 0.$$

Por conseguinte, a equação tem uma solução periódica com a forma

$$y(x) = -\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{16n^2 - 1}.$$

Calcular soluções periódicas (caso estas existam) das seguintes equações diferenciais:

752. $y'' + 3y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx + \sin nx}{n^3}$.

753. $y'' + y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

754. $y'' + y = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

756. $y'' + y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

757. $y'' + 4y = \cos^2 x$.

758. $y'' - 4y' + 4y = \pi^2 - x^2, \quad -\pi < x < \pi$.

759. $y'' - 4y = |\cos \pi x|$.

760. $y'' - 4y' + 4y = \arcsin(\sin x)$.

761. $y'' + 9y = \sin^3 x$.

4.° Integração Assimptótica.

Consideremos a série (eventualmente divergente)

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \cdots, \tag{53}$$

Representemos por $S_n(x)$ a soma dos primeiros $n + 1$ termos desta série.

Diz-se que a série (53) é um desenvolvimento assimptótico da função $f(x)$ para valores suficientemente grandes de $|x|$ se a expressão $R_n(x) = x^n [f(x) - S_n(x)]$ satisfizer a condição

$$\lim_{|x| \to \infty} R_n(x) = 0, \quad \text{ou} \quad R_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right) \tag{54}$$

(onde n é qualquer número fixo), mesmo que $\lim_{n \to \infty} |R_n(x)| = \infty$ (com x fixo). O facto de esta série ser um desenvolvimento assimptótico da função $f(x)$ denota-se do seguinte modo

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n.$$

A razão de ser do desenvolvimento assimptótico está em que a série pode dar origem a fórmulas aproximadas

$$f(x) \approx A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

de tal modo que a diferença $f(x) - S_n(x) = \rho_n(x)$, quando $|x| \to \infty$, seja um infinitésimo de ordem superior a n, i.e.,

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\rho_n(x)}{\frac{1}{|x|^n}} = 0, \quad \text{ou} \quad \lim_{|x|\to\infty} |x|^n \rho_n(x) = 0.$$

EXEMPLO 11. Consideremos a função

$$f(x) = \int_x^{\infty} t^{-1} e^{x-t} dt, \quad x > 0. \tag{55}$$

Integrando n vezes por partes obtém-se

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} + (-1)^n n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}} dt,$$

Utilizemos a notação $u_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ e consideremos

$$S_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \cdots + \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} = \sum_{m=0}^{n} u_m,$$

Temos $\left|\dfrac{u_m}{u_{m-1}}\right| = \dfrac{m}{x} \to \infty$ quando $m \to \infty$, de tal modo que a série $\sum_{m=0}^{\infty} u_m$ é divergente para qualquer valor de x. No entanto, esta série pode ser utilizada para calcular $f(x)$, quando x toma valores grandes. De facto, fixemos um certo valor de n:

$$f(x) - S_n(x) = (-1)^{n+1}(n+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}} dt,$$

daqui, uma vez que $e^{x-t} < 1$ $(t > x)$, temos

$$|f(x) - S_n(x)| = (n+1)! \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}} dt \le (n+1)! \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{n+2}} = \frac{n!}{x^{n+1}}. \tag{56}$$

Para valores de x suficientemente grandes, o segundo membro desta desigualdade pode tornar-se tão pequeno quanto se quiser. Assim, para $x > 2n$, tem-se

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{1}{2^{n+1} n^2},$$

pelo que o valor de $f(x)$ pode ser calculado com grande precisão para valores grandes de x, se considerarmos a soma de um número adequado de termos da série $\sum_{m=0}^{\infty} u_m$. Da estimativa (56) resulta $R_n(x) = x^n\{f(x) - S_n(x)\}$ quando $x \to \infty$ para cada valor fixo de n, de tal modo que a série $\sum_{m=0}^{\infty} u_m$ constitui um desenvolvimento assimptótico da função $f(x)$ dada.

Se a condição (54) for satisfeita, então os coeficientes A_k da série (53) verificam

$$A_0 = \lim_{x\to\infty} x^n\{f(x) - S_{n-1}(x)\}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{57}$$

Daqui resulta que se a função $f(x)$ tiver um desenvolvimento assimptótico, então este é único.

Por outro lado, a mesma série pode constituir o desenvolvimento assimptótico de diferentes funções. Por exemplo, no caso da função

$$f(x) = e^{-x} \quad (0 < x < +\infty),$$

o desenvolvimento assimptótico é dado por uma série da forma (53), cujos coeficientes, de acordo com (57), são todos nulos: $A_n = 0$, $(n = 0, 1, \ldots)$.

É evidente que a mesma série constitui o desenvolvimento assimptótico da função $f(x) \equiv 0$. Diz-se, portanto, que uma série assimptótica representa, não uma função, mas sim uma classe de funções, assimptoticamente iguais.

Operações com séries assimptóticas.

1) Se

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{-k} \quad \text{e} \quad g(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{-k}, \tag{58}$$

então

$$f(x) \pm g(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \pm B_k) x^{-k}. \tag{59}$$

2) Se os desenvolvimentos assimptóticos (58) forem válidos, então o desenvolvimento assimptótico da função $f(x)g(x)$ pode ser obtido multipilicando formalmente os desenvolvimentos (58).

3) Se a função $f(x)$ admitir o desenvolvimento assimptótico

$$f(x) \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{x^k}. \tag{60}$$

a começar no termo x^{-2}, então é válido o seguinte desenvolvimento assimptótico:

$$\int_x^{\infty} f(x)\,dx \sim \sum_{k=2}^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{A_k}{x^k}\,dx$$

ou

$$\int_x^{\infty} f(x)\,dx \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{(k-1)\,x^{k-1}}\,dx, \tag{61}$$

i.e. o desenvolvimento assimptótico (60) pode ser formalmente integrado termo a termo.

4) A diferenciação formal, termo a termo, de uma série assimptótica, de um modo geral, não é válida.

Na realidade, consideremos a função

$$f(x) = e^{-x} \sin e^{-x}, \quad 0 < x < +\infty.$$

O seu desenvolvimento assimptótico é uma série com todos os coeficientes nulos: $A_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$; no entanto, a sua derivada, a função $f'(x) = -e^{-x} \sin e^{x} + \cos e^{x}$ não tem desenvolvimento assimptótico, uma vez que $f'(x)$ nem sequer tem limite quando $x \to \infty$.

Contudo, se a função $f(x) \sim A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots$ for diferenciável, e a função $f'(x)$ puder ser desenvolvida numa série de potências assimptótica, então

$$f'(x) \sim -\frac{A_1}{x^2} - \frac{2A_2}{x^3} - \frac{3A_3}{x^4} - \cdots.$$

762. Mostre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \sim \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \cdots,$$

onde x é um número real positivo.

763. Mostre que

$$e^{z} z^{-a} \int_z^{\infty} e^{-x} x^{a-1}\,dx \sim \frac{1}{z} + \frac{a-1}{z^2} + \frac{(a-1)(a-2)}{z^3} + \cdots$$

para valores positivos grandes de z.

764. Determine o desenvolvimento assimptótico da função

$$f(x) = 1/x + e^{-x} \sin e^{2x}, \; 0 < x < \infty.$$

Mostre que $f'(x)$ não tem desenvolvimento assimptótico.

Aplicação à integração de equações diferenciais.

EXEMPLO 12. Consideremos a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x}. \tag{62}$$

A série

$$\frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \cdots + \frac{n!}{x^{n+1}} + \cdots, \tag{63}$$

divergente para qualquer valor de x, satisfaz formalmente a equação dada, o que se verifica facilmente por substituição. A equação (62) é satisfeita pela função (*)

$$y = e^{-x} \int_{-\infty}^{x} t^{-1} e^{t}\,dt,$$

sendo o integral do segundo membro convergente quando $x < 0$. Integrando sucessivamente por partes, obtém-se

$$e^{-x} \int_{-\infty}^{x} t^{-1} e^{t}\,dt = \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \cdots + \frac{n!}{x^{n+1}} + \rho_n,$$

onde

$$\rho_n = (n+1)!\,e^{-x} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^{n+2}}\,dt.$$

Para $x < 0$, temos

$$|\rho_n| \le (n+1)!\,e^{-x} \frac{1}{|x|^{n+2}} \int_{-\infty}^{x} e^{t}\,dt = \frac{(n+1)!}{|x|^{n+2}}.$$

Por conseguinte, ao considerar os primeiros n termos da série, estamos a cometer um erro, inferior ao termo de ordem $n+1$. É fácil verificar que, neste caso,

$$R_n(x) = x^n \{f(x) - S_n(x)\} = x^n \rho_n(x) \to 0 \text{ quando } x \to \infty.$$

Logo, a série construída é assimptótica e pode ser utilizada para o cálculo do integral e, por conseguinte, para a integração da equação (62).

(*) A função definida pelo integral $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}$ designa-se função exponencial integral e representa-se por $Ei(x)$.

EXEMPLO 13. Se $J_\nu(x)$ for uma solução da equação de Bessel $y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, então, substituindo J_ν pela função $x^{1/2}y(x)$, verifica-se que $y(x)$ satisfaz a equação

$$y'' + \left(1 - \frac{\gamma^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)y = 0. \tag{64}$$

Para valores grandes de x ($x \gg \nu$), é natural tentar aproximar esta equação por

$$y_1'' + y_1 = 0, \tag{65}$$

cuja solução é

$$y_1 = a_0 \sin x + b \cos x.$$

Podemos aumentar a precisão da aproximação (para valores grandes de n) substituindo as constantes a_0 e b_0 por séries de potências negativas de x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n}.$$

Isto significa que a solução da equação (64) pode ser procurada sob a forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} \sin x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n} \cos x. \tag{66}$$

Substituindo a expressão (66) na equação (64), obtém-se

$$y(x) = \left[a_0 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2x} b_0 - \frac{\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{9}{4}\right)}{2(2x)^2} a_0 + \cdots\right] \times$$
$$\times \sin x + \left[b_0 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2x} a_0 - \frac{\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{9}{4}\right)}{2(2x)^2} b_0 + \cdots\right] \cos x. \tag{67}$$

Este processo pode ser continuado. É importante notar que estas expressões conduzem à solução exacta no caso de $\nu = \pm 1/2, \pm 3/2$ (ver funções de Bessel de índice semi-inteiro). Diz-se que a equação (65) constitui a equação limite de (64) (a equação (65) obtém-se de (64) se no coeficiente de y se passar ao limite, quando $x \to \infty$). Para valores grandes de x, a solução da equação (65) aproxima com bastante precisão o comportamento da solução da equação inicial (64) (sobretudo no caso de $\nu = \pm \frac{2k+1}{2}$).

Alguns exemplos mostram que o comportamento assimptótico das soluções de uma equação diferencial nem sempre pode ser deduzido do comportamento das soluções da equação limite.

Consideremos a função (ver [16])

$$y(x) = x^{\alpha} \sin(x^{\beta} + C), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \tag{68}$$

e deduzamos uma equação diferencial da qual ela é solução. Temos

$$y' = \alpha x^{\alpha-1} \sin(x^{\beta} + c) + \beta x^{\alpha+\beta-1} \cos(x^{\beta} + C);$$

$$y'' = \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} - \frac{\beta^2}{x^{2-2\beta}}\right] x^{\alpha} \sin(x^{\beta} + C) + \beta(2\alpha + \beta - 1)\, x^{\alpha+\beta-2} \cos(x^{\beta} + C).$$

Vamos impor que α e β satisfaçam a igualdade

$$\beta(2\alpha + \beta - 1) = 0. \tag{69}$$

Então a função $y(x)$ dada vai satisfazer a equação diferencial

$$y'' + \left[\frac{\beta^2}{x^{2-2\beta}} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{x^2}\right] y = 0. \tag{70}$$

Suponhamos que $0 < \beta < 1$, por exemplo, $\beta = 1/2$. Então, da condição (69) obtém-se $\alpha = 1/4$ e a solução da equação (70) é

$$y(x) = \sqrt[4]{x} \sin\left(\sqrt{x} + C\right). \tag{71}$$

Quando $x \to \infty$, esta solução é oscilatória. Por outro lado, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\beta^2}{x^{2-2\beta}} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{x^2}\right] = 0,$$

pelo que a equação limite, correspondente a (70), é

$$y'' = 0. \tag{72}$$

A sua solução geral é

$$y = Ax + b, \tag{73}$$

que não tem nenhum termo oscilatório. Assim, o comportamento assimptótico da solução (71) da equação (70) não pode ser «adivinhado» pelo comportamento da solução (73) da equação limite (72).

Apresentemos alguns resultados relativos a esta questão. Consideremos a equação diferencial

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \tag{74}$$

onde

$$p_1(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots, \tag{75}$$

$$p_2(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots,$$

pelo que

$$\lim_{x\to\infty} p_1(x) = a_0, \quad \lim_{x\to\infty} p_2(x) = b_0. \tag{76}$$

A equação limite, neste caso, tem a forma

$$y'' + a_0 y' + b_0 y = 0, \tag{77}$$

que é uma equação com coeficientes constantes. Sejam λ_1 e λ_2 as raízes da equação característica

$$\lambda^2 + a_0\lambda + b_0 = 0 \tag{78}$$

(para simplificar, vamos considerá-las distintas). Então as soluções da equação limite são as exponenciais $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$.

Neste caso [16], verifica-se que o comportamento assimptótico das soluções da equação (74) é análogo, não ao comportamento das combinações lineares das funções exponenciais $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$, mas sim ao das combinações lineares das funções

$$e^{\lambda_1 x} x^{\sigma_1}, \quad e^{\lambda_2 x} x^{\sigma_2}, \tag{79}$$

onde os expoentes σ_1 e σ_2 são determinados pelas fórmulas

$$\sigma_1 = -\frac{a_1\lambda_1 + b_1}{a_0 + 2\lambda_1}, \quad \sigma_2 = -\frac{a_1\lambda_2 + b_1}{a_0 + 2\lambda_2}. \tag{80}$$

As funções (79) dependem não só de a_0 e b_0, i.e., não só dos valores limites de $p_1(x)$ e $p_2(x)$ quando $x \to \infty$ mas também dos coeficientes a_1 e b_1, que figuram no segundo membro das igualdades (75).

TEOREMA. Se a equação característica (78) tiver as raízes distintas λ_1 e λ_2 e se σ_1 e σ_2 forem definidos pelas igualdades (80), então a equação

$$y'' + \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\right)y' + \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots\right)y = 0$$

admite as soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$, linearmente independentes, que podem ser representadas pelas séries assimptóticas

$$y_1(x) \sim e^{\lambda_1 x} x^{\sigma_1}\left(1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots\right),$$

$$y_1(x) \sim e^{\lambda_2 x} x^{\sigma_2}\left(1 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots\right).$$

Se as raízes da equação característica coincidirem, pode surgir um termo logarítmico. Nesse caso, a solução $y_1(x)$ pode ser representada por uma série assimptótica do tipo da primeira série (81), enquanto a segunda solução $y_2(x)$ pode ser representada por uma série do tipo

$$y_2(x) \sim Ay_1(x)\ln x + e^{\lambda_1 x} x^{\sigma_1}\left(K_0 + \frac{K_1}{x} + \frac{K_2}{x^2} + \cdots\right). \tag{82}$$

Os coeficientes A_i, B_i, K_i podem ser, neste caso, calculados pelo conhecido método dos coeficientes indeterminados, substituindo as expressões (81) e (82) na equação e igualando a zero os coeficientes associados a cada potência de $1/x$. Além disso, a diferenciação formal dos desenvolvimentos assimptóticos conduz aos desenvolvimentos assimptóticos correctos das funções procuradas (embora a validade deste procedimento não esteja assegurada *a priori*).

765. Mostre que a equação $y'' + (1 + \alpha/x^2)y = 0$, quando $x \to \infty$, tem duas soluções do tipo

$$y_1(x) = (1 + O(1/x))\cos x, \quad y_2(x) = (1 + O(1/x))\sin x.$$

766. Mostre que a equação $y'' - (1 - \alpha/x^2)y = 0$, quando $x \to \infty$, tem duas soluções do tipo

$$y_1(x) = (1 + O(1/x))\,e^{x}, \quad y_2(x) = (1 + O(1/x))\,e^{-x}.$$

Capítulo 3

Sistemas de Equações Diferenciais

19. CONCEITOS E DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS

O sistema de equações diferenciais

$$F_k\left(x,\ y_1',\dots,\ y_1^{(k_1)},\ y_2,\ y_2',\dots,\ y_2^{(k_1)},\dots,\ y_n,\ y_n',\dots,\ y^{(k_n)}\right)=0 \qquad (1)$$

$$k=1,\ 2,\dots,\ n,$$

resolvido em ordem às derivadas $y_1^{(k_1)},\ y_2^{(k_2)},\dots,\ y_n^{(k_n)}$, designa-se sistema canónico. Pode ser escrito sob a forma

$$\begin{cases} y_1^{(k_1)}=f_1\left(x,\ y_1,\ y_1',\dots,\ y_1^{(k_1-1)},\ y_2,\ y_2',\dots,\ y_2^{(k_2-1)},\dots\ y_n,\ y_n',\dots,\ y^{(k_n-1)}\right), \\ y_2^{(k_2)}=f_2\left(x,\ y_1,\ y_1',\dots,\ y_1^{(k_1-1)},\ y_2,\ y_2',\dots,\ y_2^{(k_2-1)},\dots\ y_n,\ y_n',\dots,\ y_n^{(k_n-1)}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{(k_n)}=f_n\left(x,\ y_1,\ y_1',\dots,\ y_1^{(k_1-1)},\ y_2,\ y_2',\dots,\ y_2^{(k_2-1)},\dots\ y_n,\ y_n',\dots,\ y_n^{(k_n-1)}\right), \end{cases} \qquad (2)$$

Chama-se ordem do sistema (1) ao número p, dado pela fórmula

$$p=k_1+k_2+\cdots+k_n.$$

EXEMPLO 1. Reduzir à forma canónica o sistema de equações

$$\begin{cases} y_2y_1'-\ln\left(y_1''-y_1\right)=0, \\ e^{y_2'}-y_1-y_2=0. \end{cases}$$

Resolução. O sistema dado é de ordem 3, uma vez que $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, donde $p = 3$. Resolvendo a primeira equação em ordem a y_1'' e a segunda em ordem a y_2', obtém-se o sistema canónico

$$y_1'' = y_1 + e^{y_2 y_1'}, \quad y_2' = \ln (y_1 + y_2). \ \blacklozenge$$

Um sistema de equações diferenciais de primeira ordem do tipo

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

onde t é a variável independente; $x_1, x_2, \dots$ e x_n são funções incógnitas de t, designa-se sistema normal.

O número n diz-se a ordem do sistema normal (3). Dois sistemas de equações dizem-se equivalentes se tiverem as mesmas soluções.

Qualquer sistema canónico (2) pode ser reduzido a um sistema normal equivalente da forma (3), tendo os dois sistemas a mesma ordem.

EXEMPLO 2. Reduzir a um sistema normal o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - y = 0, \\ t^3 \dfrac{dy}{dt} - 2x = 0. \end{cases}$$

Resolução. Seja $x = x_1$, $dx/dt = x_2$, $y = x_3$. Então teremos $dx_1/dt = x_2$, $dy/dt = dx_3/dt$, e o sistema dado reduz-se ao seguinte sistema de terceira ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \dfrac{2x_1}{t^3}. \end{cases}$$

EXEMPLO 3. Reduzir a equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)\,x = 0$$

a um sistema normal.

Resolução. Seja $x = x_1$, $dx/dt = x_2$, então $dx_1/dt = x_2$, $d^2x/dt^2 = dx_2/dt$. Substituindo estas expressões na equação dada, obtém-se

$$\frac{dx_2}{dt} + p(t)\,x_2 + q(t)\,x_1 = 0.$$

O sistema normal tem a forma

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -p(t)\,x_2 - q(t)\,x_1.$$

Chama-se solução do sistema (3) no intervalo (a, b) a qualquer conjunto de n funções

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \dots, \quad x_n = \varphi_n(t),$$

definidas e continuamente diferenciáveis no intervalo (a, b), tais que, ao serem substituídas nas equações do sistema (3), estas se tornam identidades, válidas para qualquer $t \in (a, b)$.

EXEMPLO 4. Mostre que o sistema de funções $x_1 = -1/t^2$, $x_2 = -t \ln t$, definidas no intervalo $0 < t < +\infty$, é uma solução do sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx_1}{dt} = 2tx_1^2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{t} - 1.$$

Resolução. Temos $dx_1/dt = 2/t^3$, $dx_2/dt = -1 - \ln t$. Substituindo nas equações do sistema dado as funções x_1, x_2, dx_1/dt e dx_2/dt pelas suas expressões através de t, obtêm-se as identidades

$$\frac{2}{t^3} = \frac{2t}{t^4} = \frac{2}{t^3}, \quad -\ln t - 1 = -\ln t - 1, \quad 0 < t < +\infty.$$

Verifique se os sistemas de funções dados são soluções dos sistemas de equações correspondentes:

767. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2tx_1^2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{x_2 + t}{t}; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{t^2}, \\ x_2 = t \ln t. \end{cases}$

768. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = e^{t - x_1}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2e^{x_1}; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = 2e^t. \end{cases}$

769. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2}{x}; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^t. \end{cases}$

770. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z - 1}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = y - x; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = x + e^x, \\ z = e^{-x}. \end{cases}$

Chama-se problema de Cauchy para o sistema (3) o problema da determinação da solução

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$$

deste sistema que satisfaz as seguintes condições iniciais:

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0, \dots,\ x_n(t_0) = x_n^0, \qquad (4)$$

onde $t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, são números dados.

Teorema sobre a existência e unicidade de solução do problema de Cauchy.

Consideremos o sistema normal de equações diferenciais (3) e suponhamos que as funções $f_i(t, x_1, x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ estão definidas num certo domínio $(n + 1)$ – dimensional D. Se existir uma vizinhança $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ do ponto $M_0(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, na qual as funções f_i *a)* são contínuas, *b)* têm derivadas parciais limitadas em ordem às variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$, então existe um intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$, no qual existe uma única solução do sistema normal (3) que satisfaz as condições iniciais (4).

O sistema de n funções diferenciáveis

$$x_i = x_i(t,\ C_1,\ C_2, \dots,\ C_n),\quad i = 1, 2, \dots, n \qquad (5)$$

de variável independente t, e de n constantes arbitrárias $C_1, C_2, \dots, C_n$ designa-se solução geral do sistema normal (3) se: 1) para quaisquer valores permitidos de $C_1, C_2, \dots, C_n$ o sistema de funções (5) transforma as equações (3) em identidades; 2) no domínio em que se verificam as condições do teorema de Cauchy, as funções (5) dão a solução de qualquer problema de Cauchy.

EXEMPLO 5. Mostre que o sistema de funções

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ x_2(t) = 2C_1 e^{-t} - C_2 e^{3t} \end{cases} \qquad (6)$$

constitui a solução geral do sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 - 4x_1. \end{cases} \qquad (7)$$

Resolução. No exemplo dado o domínio D é

$$-\infty < t < +\infty,\ -\infty < x_1,\ x_2 < +\infty. \qquad (8)$$

Substituindo as funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$, definidas pelas igualdades (6), no sistema de equações (7), obtêm-se identidades em ordem a t, quaisquer que sejam as constantes C_1 e C_2. Deste modo, a condição 1) que define a solução geral é satisfeita.

Verifiquemos que a condição 2) também é satisfeita. Note-se que, no caso do sistema (7), as condições do teorema sobre a existência e unicidade de solução do problema de Cauchy estão satisfeitas em todo o domínio D, definido pelas desigualdades (8). Logo, as condições iniciais podem ser definidas por qualquer terno de números t_0, x_1^0, x_2^0. Então das igualdades (6) obtém-se o seguinte sistema, em ordem a C_1 e C_2:

$$\begin{cases} x_1^0 = C_1 e^{-t_0} + C_2 e^{3t_0}, \\ x_2^0 = 2C_1 e^{-t_0} - 2C_2 e^{3t_0}. \end{cases}$$

O determinante deste sistema é $\Delta = -4e^{2t_0} \neq 0$; por conseguinte, ele é determinado em ordem a C_1, C_2, para quaisquer x_1^0, x_2^0 e t_0. Isto significa que qualquer problema de Cauchy tem solução. Logo, o sistema de funções (6) é a solução geral do sistema de equações (7). ✦

As soluções que se obtêm da solução geral, dando valores concretos às constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$, designam-se soluções particulares.

EXEMPLO 6. Partindo da solução geral (6) do sistema (7), determinar a solução particular deste sistema que satisfaz as condições $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = -4$.

Resolução. O problema fica reduzido à determinação de valores das constantes C_1 e C_2, para os quais se verificam as relações

$$0 = C_1 + C_2,\ -4 = 2C_1 - 2C_2.$$

Resolvendo este sistema, determina-se $C_1 = -1$, $C_2 = 1$. A solução particular procurada é

$$x_1(t) = -e^{-t} + e^{3t},\ x_2(t) = -2e^{-t} - 2e^{3t}.$$

Observações.

1. Nem todos os sistemas de equações diferenciais podem ser reduzidos a uma única equação. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2. \end{cases}$$

decompõe-se em duas equações independentes. Neste caso, a solução geral obtém-se integrando separadamente cada equação:

$$x_1 = C_1 e^{-t},\ x_2 = C_2 e^{t}.$$

2. Se o número de equações do sistema for igual a n e o número de funções incógnitas for N, com $N > n$, o sistema é indeterminado. Nesse caso, podem escolher-se arbitrariamente $N - n$ funções incógnitas (desde que sejam diferenciáveis o número de vezes necessário) e determinar as restantes n funções em ordem a estas.

3. Se o sistema for de n equações e o número de funções incógnitas for N, com $N < n$, então o sistema pode ser incompatível, isto é, não ter nem uma solução.

Consideremos, para simplificar, um sistema normal de duas equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2). \end{cases} \tag{9}$$

Consideraremos o sistema de valores t, x_1, x_2 como as coordenadas cartesianas dum ponto do espaço tridimensional, no sistema de coordenadas Otx_1x_2. A solução

$$x_1 = x_1(t), \; x_2 = x_2(t),$$

que toma em $t = t_0$ os valores x_1^0, x_2^0, descreve neste espaço uma certa linha, que passa pelo ponto $M_0(t_0, x_1^0, x_2^0)$. Esta linha denomina-se curva (linha) integral do sistema normal (9).

O problema de Cauchy para o sistema (9) tem a seguinte formulação geométrica: no espaço das variáveis t, x_1, x_2 determinar a curva integral que passa pelo ponto dado (t_0, x_1^0, x_2^0). O teorema de Cauchy afirma a existência e unicidade de tal linha.

O sistema normal (9) e a sua solução podem ainda ser interpretados do seguinte modo. Consideraremos a variável independente t como o tempo, e o sistema de valores x_1, x_2 como as coordenadas cartesianas dum ponto do plano $x_1 0 x_2$. Este plano das variáveis $x_1 0 x_2$ designa-se plano de fases. No plano de fases, a solução

$$x_1 = x_1(t), \; x_2 = x_2(t)$$

do sistema (9), que toma os valores iniciais x_1^0, x_2^0 quando $t = t_0$, é representada pela linha AB (Fig. 28) que passa pelo ponto $M_0(x_1^0, x_2^0)$. Esta linha designa-se trajectória do sistema (trajectória de fases). É evidente que a trajectória do sistema (9) é a projecção da curva integral no plano de fases.

O sistema (9) determina em cada instante t, num dado ponto (x_1, x_2) do plano de fases, as coordenadas da velocidade $\{f_1, f_2\}$ dum ponto em movimento.

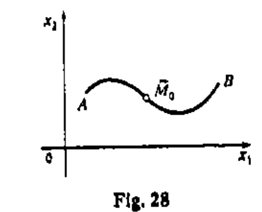


Fig. 28

EXEMPLO 7. Resolver o sistema de equações

$$\frac{dx}{dt} = y, \; \frac{dy}{dt} = -x \tag{10}$$

com as condições iniciais

$$x(0) = x_0, \; y(0) = y_0. \tag{11}$$

Resolução. Diferenciando uma vez em ordem a t a primeira equação do sistema (10) e substituindo na equação assim obtida $dy/dt = -x$, reduz-se o sistema (10) a uma equação de segunda ordem $d^2y/dt^2 + x = 0$, cuja solução geral é

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

Uma vez que $y = dx/dt$, temos $y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$; logo, a solução geral do sistema (10) é

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \; y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \tag{12}$$

Uma solução particular do sistema (10) que satisfaz as condições (11) é

$$x = x_0 \cos t + y_0 \sin t, \; y = -x_0 \sin t + y_0 \cos t. \tag{13}$$

Excluindo t das equações (13) (elevando ao quadrado ambas as equações e somando-as) obtém-se a trajectória de fase:

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{14}$$

onde $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Trata-se duma circunferência que passa pelo ponto $M_0(x_0, y_0)$. Representando a equação (13) sob a forma

$$\begin{cases} x = R \sin(t + \alpha), \\ y = R \cos(t + \alpha), \end{cases} \tag{15}$$

onde $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $\sin \alpha = x_0/R$, $\cos \alpha = y_0/R$, verifica-se que as equações (15) exprimem a dependência, em relação ao tempo, das coordenadas do ponto $M(x(t),\ y(t))$, (abreviadamente, $M(t)$), o qual inicia o seu movimento no ponto $M_0(x_0, y_0)$ quando $t = 0$ e se desloca ao longo da circunferência (14) (Fig. 29, *a*).

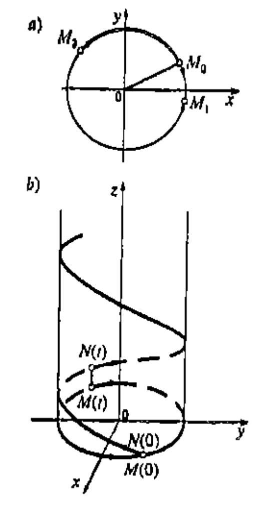


Fig. 29

O sentido do movimento do ponto $M(t)$ é determinado com o auxílio do sistema (10). Quando $x > 0$, de acordo com a equação $dy/dt = -x$, o valor de y decresce (como, por exemplo, no ponto $M_1(t)$), enquanto, para $x < 0$, o valor de y aumenta (como, por exemplo, no ponto $M_2(t)$). Deste modo, o ponto $M(t)$ move-se ao longo da curva (14) segundo o sentido dos ponteiros do relógio. Alterando arbitrariamente as condições iniciais (11) (mantendo-se embora dentro dos limites fisicamente possíveis), isto é, modificando à nossa vontade a posição inicial do ponto $M_0(x_0, y_0)$, obtêm-se todas as possíveis trajectórias de fase (14).

Vamos dar agora uma nova interpretação das equações (15) (ou, o que vem a ser o mesmo, das equações (13)). No espaço tridimensional consideremos o sistema de coordenadas cartesiano directo $0xyz$. É fácil verificar que o ponto $N(x(t), y(t), z(t))$ (ou, abreviadamente, $N(t)$) com as coordenadas (Fig. 29, *b*))

$$x(t) = R \sin(t + \alpha),\quad y(t) = R \cos(t + \alpha),\quad z(t) = t \qquad (16)$$

inicia o seu movimento quando $t = 0$ no ponto $N(x, y, 0)$ é, à medida que t aumenta, sobe ao longo da linha helicoidal (16), situado no cilindro (14), com as geratrizes paralelas ao eixo $0z$.

É evidente que o ponto N_0 coincide com o ponto M_0 e que, para qualquer t, o ponto $M(t)$ é a projecção do ponto $N(t)$ na trajectória de fases. Uma vez que o ponto $M(t)$ se move no sentido dos ponteiros do relógio, a linha integral, descrita pelo ponto $N(t)$, é uma linha helicoidal de orientação inversa no cilindro (14). Se o ponto $N(x_0, y_0, 0)$ tomar diferentes posições, as curvas integrais do sistema (10), correspondentes a diferentes valores de $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, projectam-se no plano $x0y$, formando diferentes curvas (14), enquanto as curvas integrais, correspondentes ao mesmo valor de R, se projectam sobre a mesma curva (14). ✦

A função $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definida e contínua juntamente com as suas derivadas parciais de primeira ordem $d\psi/dt$, $d\psi/dx_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, no domínio D, chama-se integral do sistema normal (3) se, ao substituir nela qualquer solução $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ do sistema (3), ela se transforma numa grandeza constante; isto é, a função $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ depende apenas da escolha da solução $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, mas não da variável t.

Chama-se primeiro integral do sistema (3) a igualdade

$$\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C,$$

onde $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é um integral do sistema (3) e C é uma constante arbitrária (*).

EXEMPLO 8. Mostre que a função

$$\psi(t,\ x_1,\ x_2) = \frac{x_2}{t} - x_1, \qquad (17)$$

definida no domínio D: $t \neq 0$, $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, é um integral do sistema de equações

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{t},\qquad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \frac{x_2}{t}, \qquad (18)$$

sabendo que a solução geral deste sistema é

$$x_1 = C_1 t,\quad x_2 = C_1 t^2 + C_2 t. \qquad (19)$$

Resolução. Substituindo (19) em (17), obtém-se

$$\psi(t,\ x_1,\ x_2) = \psi(t,\ C_1 t,\ C_1 t^2 + C_2 t) = \frac{C_1 t^2 + C_2 t}{t} - C_1 t = C_2$$

no domínio D. Por conseguinte, a função (17) é um integral do sistema de equações (18) no domínio D, pelo que um primeiro integral deste sistema será $x_2/t - x_1 = C$, onde C é uma constante arbitrária.

(*) Por vezes, chama-se primeiro integral do sistem (3) a qualquer integral deste sistema.

TEOREMA. Para que a função $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ seja um integral do sistema (3), é necessário e suficiente que se verifique a condição

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = 0 \qquad (20)$$

no domínio D.

EXEMPLO 9. Mostre que a função

$$\psi(t, x_1, x_2) = \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} - t \qquad (21)$$

é um integral do sistema de equações

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1^2}{x_2}, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{x_2^2}{x_1}. \qquad (22)$$

Resolução. Neste caso,

$$f_1(t, x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2}, \quad f_2(t, x_1, x_2) = -\frac{x_2^2}{x_1}. \qquad (23)$$

Determinemos as derivadas parciais da função $\psi(t, x_1, x_2)$ dada. Temos

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}. \qquad (24)$$

Substituindo (23) e (24) no primeiro membro de (20), obtém-se

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + f_1(t, x_1, x_2)\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + f_2(t, x_1, x_2)\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -1 + \frac{x_1^2}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_1^2}{x_2} \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = -1 + 1 = 0,$$

no domínio $D: -\infty < t < +\infty, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$.

Deste modo, a função (21) é um integral do sistema de equações (22) e, por conseguinte, um primeiro integral do sistema (22) será

$$\operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} - t = C,$$

onde C é uma constante arbitrária. ✦

O sistema normal (3) tem uma infinidade de sistemas de primeiros integrais.

Os integrais ψ_1, ψ_2, ψ_n, do sistema (3) dizem-se independentes em relação às funções incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se entre as funções $\psi_1, \ldots, \psi_n$, não existir nenhuma relação do tipo $F(\psi_1, \psi_2, \psi_n) = 0$, qualquer que seja a função F, não dependente explicitamente de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

TEOREMA. Para que as funções $\psi_1, \ldots, \psi_n$, que têm derivadas parciais $\partial\psi_i/\partial x_k$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ sejam independentes em relação a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ num certo domínio D, é necessário e suficiente que o jacobiano destas funções seja diferente de 0 em D:

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Chama-se integral geral do sistema (3) a qualquer conjunto de n primeiros integrais independentes deste sistema.

Se forem conhecidos k primeiros integrais ($k < n$) independentes do sistema (3), então a ordem deste pode ser reduzida em k unidades.

Verifique se as funções ψ dadas são primeiros integrais dos sistemas de equações diferenciais indicados.

771. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{x_1}{x_2}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 - x_1, \end{cases}$ $\quad \psi = x_1 x_2 e^{-t}$.

772. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{e^{-x}}{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{t} e^{-y}, \end{cases}$ $\quad \psi = (1+x)e^{-x} - e^{-y}$.

773. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y+t}{x+y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x-t}{x+y}, \end{cases}$ $\quad$ *a)* $\psi_1 = x + y - t$, $\quad$ *b)* $\psi_2 = x + y + t$.

Para os seguintes sistemas de equações diferenciais, verificar se os pares de funções indicados constituem sistemas de primeiros integrais independentes:

774. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t-y}{y-x}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x-t}{y-x}, \end{cases} \qquad x+y+t = C_1, \quad x^2+y^2+t^2 = C_2.$$

775. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t+y}{x+y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t+x}{x+y}, \end{cases} \qquad \dfrac{x-y}{t-x} = C_1, \quad \dfrac{t-x}{t-y} = C_2.$$

20. MÉTODO DA ELIMINAÇÃO (REDUÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS A UMA SÓ EQUAÇÃO)

Um caso particular de um sistema canônico de equações diferenciais é uma equação de ordem n, resolvida em ordem à derivada de ordem mais alta:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

Introduzindo as novas funções

$$x_1 = x'(t), \ x_2 = x''(t), \dots, x_{n-1} = x^{(n-1)}(t)$$

esta equação pode ser reduzida a um sistema normal de n equações:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x_1, \\ \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_{n-2}}{dt} = x_{n-1}, \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = f(t, x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \end{cases}$$

O inverso também é verdadeiro: em geral, um sistema normal de n equações de primeira ordem,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases}$$

é equivalente a uma equação de ordem n. Neste princípio baseia-se um dos métodos de resolução de sistemas de equações diferenciais: o método da eliminação.

Vamos ilustrar este método no caso de um sistema de duas equações:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + f(t), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + g(t). \tag{1}$$

Neste caso, a, b, c, d são coeficientes constantes; $f(t)$ e $g(t)$ são funções dadas; $x(t)$ e $y(t)$ são as funções procuradas. Da primeira equação do sistema (1) obtém-se

$$y = \frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right). \tag{2}$$

Substituindo na segunda equação do sistema a função y pelo segundo membro de (2) e a derivada dy/dt pela derivada do segundo membro de (2), obtém-se uma equação de segunda ordem em relação a $x(t)$

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx + P(t) = 0,$$

onde A, B e C são constantes. Daqui obtém-se $x = x(t, C_1, C_2)$. Substituindo em (2) a expressão obtida para x e a expressão resultante para dx/dt, determina-se y.

EXEMPLO 1. Integre o sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y+1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x+1. \end{cases} \tag{3}$$

Resolução. Da primeira equação do sistema (3) obtém-se $y = dx/dt - 1$; então

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{4}$$

Substituindo (4) na segunda equação do sistema (3), obtém-se uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x - 1 = 0. \tag{5}$$

A solução geral da equação (5) é

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1. \tag{6}$$

Calculando a primeira derivada de (6), obtém-se

$$y = \frac{dx}{dt} - 1 = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1.$$

Assim, a solução geral do sistema (3) é:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1, \; y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1.$$

EXEMPLO 2. Resolver o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 8y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y, \end{cases} \tag{7}$$

$$x(0) = 6, \; y(0) = -2. \tag{8}$$

Resolução. Da segunda equação do sistema (7) obtém-se

$$x = -3y - \frac{dy}{dt}, \tag{9}$$

logo

$$\frac{dx}{dt} = -3\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}. \tag{10}$$

Substituindo (9) e (10) na primeira equação do sistema (7), obtém-se a equação $d^2y/dt^2 - y = 0$, cuja solução geral é

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \tag{11}$$

Substituindo (11) em (9) obtém-se

$$x = -4C_1 e^t - 2C_2 e^{-t}.$$

A solução geral do sistema (7) é

$$x = -4C_1 e^t - 2C_2 e^{-t}, \; y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \tag{12}$$

Substituindo (12) nas condições iniciais (8), obtém-se o seguinte sistema de equações em ordem a C_1 e C_2:

$$\begin{cases} 6 = -4C_1 - 2C_2, \\ -2 = C_1 + C_2, \end{cases}$$

do qual resulta que $C_1 = -1$, $C_2 = -1$. Substituindo em (12) estes valores de C_1 e C_2, obtém-se a solução do problema de Cauchy considerado:

$$x = 4e^t + 2e^{-t}, \; y = -e^t - e^{-t}.$$

EXEMPLO 3. Resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} t\frac{dx}{dt} = -x + yt, \\ t^2\frac{dy}{dt} = -2x + yt. \end{cases}$$

RESOLUÇÃO. Da primeira equação do sistema obtém-se

$$y = \frac{x}{t} + \frac{dx}{dt},$$

donde

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{t^2} + \frac{1}{t}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{13}$$

Substituindo estas expressões de y e dy/dt na segunda equação, obtém-se

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} - x = -2x + x + t\frac{dx}{dt}, \quad \text{ou} \quad t^2\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Considerando $t \neq 0$, da última equação resulta $d^2x/dt^2 = 0$ e, depois de integrar, obtém-se $x = C_1 + C_2 t$. Daqui é fácil deduzir que

$$y = \frac{x}{t} + \frac{dx}{dt} = \frac{C_1 + C_2 t}{t} + C_2 = 2C_2 + \frac{C_1}{t}.$$

A solução geral do sistema dado é

$$x = C_1 + C_2 t, \; y = \frac{C_1}{t} + 2C_2, \; t \neq 0.$$

Pelo método da eliminação, resolver os seguintes sistemas de equações diferenciais:

776. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -9y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$ **777.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + t, \\ \frac{dy}{dt} = x - t. \end{cases}$ **778.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0, \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0, \quad x(0) = 1, \; y(0) = 4. \end{cases}$

779. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} - x - 3y, \quad x(0) = -2, \quad y(0) = 1. \end{cases}$

780. $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$

781. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -x + z. \end{cases}$

782. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

783. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x. \end{cases}$

784. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + x = 0, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0. \end{cases}$

785. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x. \end{cases}$

786. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = x^2 + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x\dfrac{dx}{dt} + x, \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$

786a. $\begin{cases} x'' = y, \\ y^{IV} = x + e^t. \end{cases}$

21. DETERMINAÇÃO DE COMBINAÇÕES INTEGRÁVEIS. FORMA SIMÉTRICA DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

1.º Determinação de combinações integráveis.

Este método de integração de sistemas de equações diferenciais do tipo

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

consiste no seguinte: com o auxílio das operações aritméticas adequadas (adições, subtracções, multiplicações, divisões), formam-se, a partir das equações do sistema (1), as chamadas combinações integráveis, isto é, equações que se resolvem facilmente, do tipo

$$F\left(t, u, \frac{du}{dt}\right) = 0,$$

onde u é uma certa função das funções incógnitas $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Cada combinação integrável dá um primeiro integral. Se forem determinados n primeiros integrais independentes do sistema (1), a sua integração fica concluída. Se forem determinados m primeiros integrais independentes, onde $m < n$, o sistema (1) reduz-se a um novo sistema com um número inferior de incógnitas.

EXEMPLO 1. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)t, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 x_2 t. \end{cases} \tag{2}$$

Resolução. Somando ambas as equações, obtém-se

$$\frac{d(x_1 + x_2)}{dt} = (x_1 - x_2)^2\, 2t,$$

logo,

$$-\frac{1}{x_1 + x_2} = t^2 - C_1, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x_1 + x_2} + t^2 = C_1.$$

Subtraindo uma equação à outra, obtém-se

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 2t(x_1 - x_2)^2,$$

donde resulta

$$\frac{1}{x_1 - x_2} + t^2 = C_1.$$

Assim, foram encontrados dois primeiros integrais do sistema:

$$\psi_1(t, x_1, x_2) = t^2 + \frac{1}{x_1 + x_2} = C_1,$$

$$\psi_2(t, x_1, x_2) = t^2 + \frac{1}{x_1 - x_2} = C_2.$$

Estes integrais são independentes, uma vez que o jacobiano correspondente é diferente de zero:

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{(x_1+x_2)^2} & -\dfrac{1}{(x_1+x_2)^2} \\ -\dfrac{1}{(x_1+x_2)^2} & -\dfrac{1}{(x_1+x_2)^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{(x_1^2 - x_2^2)^2} \neq 0.$$

O integral geral do sistema (2) é

$$t^2 + \frac{1}{x_1 + x_2} = C_1, \quad t^2 + \frac{1}{x_1 - x_2} = C_2. \tag{3}$$

Resolvendo o sistema (3) em ordem às funções incógnitas, obtém-se a solução geral do sistema (2):

$$x_1 = \frac{C_1 + C_2 - 2t^2}{2(C_1 - t^2)(C_2 - t^2)}, \quad x_2 = \frac{C_2 - C_1}{2(C_1 - t^2)(C_2 - t^2)}.$$

EXEMPLO 2. Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_3 - t}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_3 - t}, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + 1. \end{cases} \quad (4)$$

Resolução. Subtraindo a segunda equação à primeira, obtém-se $\dfrac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0$, donde se deduz o primeiro integral do sistema (4):

$$x_1 - x_2 = C_1. \quad (5)$$

Substituindo (5) na 2.ª e na 3.ª equações do sistema (4), obtém-se um sistema com duas funções incógnitas:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{C_1}{x_3 - t}, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = C_1 + 1. \end{cases} \quad (6)$$

Da segunda equação do sistema (6) obtém-se

$$x_3 = (C_1 + 1)\, t + C_2. \quad (7)$$

Substituindo (7) na primeira equação do sistema (6), teremos

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{C_1}{C_1 t + C_2}, \quad x_2 = \ln\left|C_1 t + C_2\right| + C_3;$$

logo,

$$x_1 - x_2 = C_1, \quad x_2 = \ln\left|C_1 t + C_2\right| + C_3, \quad x_3 = (C_1 + 1)\, t + C_2.$$

Daqui obtém-se a solução geral do sistema (4):

$$x_1 = \ln\left|C_1 t + C_2\right| + C_1 + C_3, \quad x_2 = \ln\left|C_1 t + C_2\right| + C_3, \quad x_3 = (C_1 + 1)\, t + C_2.$$

EXEMPLO 3. Determinar a solução particular do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x - t}, \end{cases}$$

que satisfaz as condições iniciais $x\big|_{t=0} = 1$, $y\big|_{t=0} = 1$.

Resolução. O sistema dado pode ser escrito sob a forma

$$\begin{cases} y\left(\dfrac{dx}{dt} - 1\right) = -1, \\ (x - t)\dfrac{dy}{dt} = 1, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y\dfrac{d(x - t)}{dt} = -1, \\ (x - t)\dfrac{dy}{dt} = 1. \end{cases}$$

Somando as duas equações, obtém-se

$$y\frac{d(x - t)}{dt} + (x - t)\frac{dy}{dt} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}[(x - t)\, y] = 0.$$

Daqui deduz-se o primeiro integral $(x - t)\, y = C_1$. Uma vez que $x - t = C_1/y$, a segunda equação do sistema adquire a forma $dy/dt = y/C_1$; logo, $y = C_2\, e^{t/C_1}$. Consequentemente,

$$(x - t)\, y = C_1, \quad y = C_2\, e^{t/C_1},$$

donde se obtém a solução geral

$$x = t + \frac{C_1}{C_2} e^{-t/C_1}, \quad y = C_2\, e^{t/C_1}.$$

Considerando $t = 0$ nestas igualdades, obtém-se $1 = C_1/C_2$, $1 = C_2$, logo $C_1 = C_2 = 1$, pelo que a solução particular procurada é

$$x = t + e^{-t}, \quad y = e^{t}.$$

EXEMPLO 4 (Decomposição de uma substância). A substância A decompõe-se em duas substâncias X e Y, sendo a velocidade de formação de cada uma delas proporcional à quantidade de substância não decomposta. Deduzir a lei da variação das quantidades x e y das substâncias X e Y em função do tempo t, sabendo que, quando $t = 0$, $x = y = 0$, e que, ao fim de uma hora, $x = a/8$, $y = 3a/8$, onde a é a quantidade inicial da substância A.

Resolução. No instante t, a quantidade de substância A não decomposta é igual a $a - x - y$. De acordo com as condições do problema, temos

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1 (a - x - y), \\ \dfrac{dy}{dt} = k_2 (a - x - y). \end{cases} \tag{8}$$

Dividindo a segunda equação pela primeira, termo a termo, obtém-se

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2}{k_1}, \text{ logo } y = \frac{k_2}{k_1} x + C_1.$$

Quando $t = 0$, temos $x = y = 0$, pelo que, da última equação, resulta que $C_1 = 0$; logo

$$y = \frac{k_2}{k_1} x. \tag{9}$$

Substituindo (9) na primeira equação do sistema, obtém-se a equação

$$\frac{dx}{dt} + (k_1 + k_2)\, x = k_1\, a,$$

cuja solução geral é

$$x = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2} + C_2\, e^{-(k_1 + k_2) t}.$$

Utilizando a condição inicial $x\big|_{t=0} = 0$, obtém-se $C_2 = -\dfrac{k_1 a}{k_1 + k_2}$, de tal modo que

$$x = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2}\left[1 - e^{-(k_1 + k_2) t}\right]. \tag{10}$$

Substituindo (10) em (9), temos

$$y = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2}\left[1 - e^{-(k_1 + k_2) t}\right]. \tag{10'}$$

A fim de determinar os coeficientes k_1 e k_2, consideremos, como unidade de tempo, a hora. Atendendo a que, quando $t = 1$, $x = a/8$ e $y = 3a/8$, de (10) e (10') resulta que

$$\frac{k_1}{k_1 + k_2}\left[1 - e^{-(k_1 + k_2)}\right] = \tfrac{1}{8}, \quad \frac{k_2}{k_1 + k_2}\left[1 - e^{-(k_1 + k_2)}\right] = \tfrac{3}{8},$$

logo,

$$k_2 = 3k_1, \quad k_1 + k_2 = \ln 2,$$

donde $k_1 = \ln 2/4$, $k_2 = 3/4 \ln 2$, pelo que a solução procurada do sistema (8) é

$$x = \frac{a}{4}(1 - 2^{t}), \quad y = \frac{3a}{4}(1 - 2^{-t}).$$

EXEMPLO 5 (Equilíbrio de gases em vasos comunicantes). Consideremos dois vasos de capacidades V_1 e V_2, respectivamente, cheios de gás. No instante inicial, a pressão do gás é igual a P_1 no primeiro vaso, e a P_2, no segundo. Os vasos estão unidos por um tubo, através do qual o gás pode passar de um vaso para o outro. Considerando que a quantidade de gás que passa de um vaso para o outro, durante um segundo, é proporcional à diferença entre os quadrados das pressões, determine as pressões p_1 e p_2, nos vasos, no instante t.

Resolução. Seja a a quantidade de gás que passa em cada unidade de tempo quando a diferença entre as pressões é de 1 unidade. Então, durante o intervalo de tempo dt, a quantidade de gás que passa de um vaso para o outro é $a(p_1^2 - p_2^2)\, dt$. Esta quantidade corresponde à perda de gás num dos vasos durante o intervalo dt, e ao ganho de gás, no outro vaso, durante o mesmo intervalo. As afirmações feitas traduzem-se no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a(p_1^2 - p_2^2) = b\, V_2 \dfrac{dp_2}{dt}, \\ a(p_1^2 - p_2^2) = -b\, V_1 \dfrac{dp_1}{dt}, \end{cases} \tag{11}$$

onde b é um coeficiente constante.

Subtraindo a segunda equação à primeira, obtém-se

$$V_1\frac{dp_1}{dt}+V_2\frac{dp_2}{dt}=0,$$

logo,

$$V_1p_1+V_2p_2=C_1. \tag{12}$$

Multipliquemos ambos os membros da primeira equação do sistema (11) por $p_1\ V_1$, e os da segunda equação, por $p_2\ V_2$, e somemos as equações assim obtidas:

$$a(p_1^2-p_2^2)(p_1V_1+p_2V_2)=bV_1V_2\left(p_1\frac{dp_2}{dt}-p_2\frac{dp_1}{dt}\right). \tag{13}$$

Atendendo à equação (12) e dividindo ambos os membros de (13) por p_1^2, temos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)=\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2\right]k,$$

onde $k=\dfrac{aC_1}{bV_1V_2}$. Utilizando a notação $p_2/p_1=z$, obtém-se

$$\frac{dz}{1-z^2}=k\,dt,\ \text{logo}\ \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|=2kt+\ln C_2$$

ou

$$\frac{1+z}{1-z}=C_2\,e^{2kt}. \tag{14}$$

Substituindo z por p_2/p_1 em (14), obtém-se, finalmente,

$$\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}=C_2\,e^{2kt}. \tag{15}$$

No momento inicial $t=0$ temos $p_1=P_1$, $p_2=P_2$, pelo que, da equação (12) resulta

$$C_1=P_1V_1+P_2V_2, \tag{16}$$

e, da equação (15),

$$C_2=\frac{P_1+P_2}{P_1-P_2}. \tag{17}$$

Das equações (12) e (15) obtêm-se as pressões procuradas $p_1(t)$ e $p_2(t)$ em qualquer instante t, sendo as constantes C_1 e C_2 determinadas pelas fórmulas (16) e (17).

Resolva os seguintes sistemas de equações diferenciais:

787. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x^2+y^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=2xy.\end{cases}$

788. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{y},\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{x}.\end{cases}$

789. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x}{y},\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y}{x}.\end{cases}$

790. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{y}{x-y},\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x}{x-y}.\end{cases}$

791. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\sin x\cos y,\\ \dfrac{dy}{dt}=\cos x\sin y.\end{cases}$

792. $\begin{cases}e^t\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{y},\\ e^t\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{x}.\end{cases}$

793. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\cos^2x\cos^2y+\sin^2x\cos^2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-\tfrac{1}{2}\sin 2x\sin 2y,\quad x(0)=0,\quad y(0)=0.\end{cases}$

2.º Forma simétrica de um sistema de equações diferenciais.

Para determinar as combinações integráveis, com vista à resolução do sistema de equações diferenciais (1), torna-se, por vezes, cómodo, escrevê-lo sob a forma simétrica:

$$\frac{dx_1}{f_1(t,x_1,x_2,\dots,x_n)}=\frac{dx_2}{f_2(t,x_1,x_2,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{f_n(t,x_1,x_2,\dots,x_n)}=\frac{dt}{1}. \tag{18}$$

Quando um sistema se encontra escrito na forma simétrica, todas as variáveis $t, x_1, x_2,\dots, x_n$ têm a mesma importância, o que, nalguns casos, facilita a determinação de combinações integráveis.

A fim de resolver o sistema (18), ou se consideram pares de igualdades que admitam separação de variáveis, ou se utilizam proporções derivadas, isto é, igualdades do tipo

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_m}{b_m}=\frac{\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\dots+\lambda_ma_m}{\lambda_1b_1+\lambda_2b_2+\dots+\lambda_mb_m}, \tag{19}$$

onde os coeficientes $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_n$ são arbitrários e são escolhidos de tal modo que o numerador seja o diferencial do denominador, ou que o denominador seja igual a zero.

EXEMPLO 6. Determine a solução geral do sistema de equações

$$\frac{dt}{2x}=-\frac{dx}{-\ln t}=\frac{dy}{\ln t-2x}. \tag{20}$$

Resolução. A primeira combinação integrável é $\frac{dt}{2x} = -\frac{dx}{\ln t}$. Separando as variáveis e integrando, encontra-se o primeiro integral

$$t(\ln t - 1) + x^2 = C_1. \qquad (21)$$

A segunda combinação integrável obtém-se utilizando proporções derivadas do tipo (19). Para isso, somemos os numeradores e os denominadores do sistema (20):

$$\frac{dt}{2x} = \frac{dx}{-\ln t} = \frac{dy}{\ln t - 2x} = \frac{dt + dx + dy}{0},$$

onde $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$. Daqui resulta $dt + dx + dy = 0$ ou $d(t + x + y) = 0$; logo,

$$t + x + y = C_2. \qquad (22)$$

Os primeiros integrais (21) e (22) dão-nos um integral geral do sistema (20):

$$x^2 + t(\ln t - 1) = C_1, \quad x + y + t = C_2,$$

do qual se obtém a solução geral do sistema:

$$x = \pm\sqrt{C_1 + t(\ln t - 1)}, \quad y = C_2 - t \mp \sqrt{C_1 + t(\ln t - 1)}.$$

EXEMPLO 7. Resolver o sistema de equações

$$\frac{dt}{4y - 5x} = \frac{dx}{5t - 3y} = \frac{dy}{3x - 4t}. \qquad (23)$$

Resolução. Multiplicando os numeradores e os denominadores do sistema (23), respectivamente, por 3, 4 e 5, e somando os resultados, obtém-se uma igualdade do tipo (19):

$$\frac{3dt}{12y - 15x} = \frac{4dx}{20t - 12y} = \frac{5dy}{15x - 20t} = \frac{3dt + 4dx + 5dy}{0}$$

(neste caso, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$). Daqui resulta $3dt + 4dx + 5dy = 0$ ou $d(3t + 4x + 5y) = 0$, pelo que $3t + 4x + 5y = C_1$, o que é um primeiro integral do sistema (23).

Se multiplicarmos agora os numeradores e os denominadores do sistema (23), respectivamente, por $\lambda_1 = 2t$, $\lambda_2 = 2x$, $\lambda_3 = 2y$, e somando os resultados, obtém-se uma proporção do tipo (19):

$$\frac{2t\,dt}{8yt - 10xt} = \frac{2x\,dx}{10xt - 6yx} = \frac{2y\,dy}{6xy - 8ty} = \frac{2t\,dt + 2x\,dx + 2y\,dy}{0},$$

logo,

$$2t\,dt + 2x\,dx + 2y\,dy = 0 \text{ ou } d(t^2 + x^2 + y^2) = 0;$$

logo, um novo primeiro integral do sistema é $t^2 + x^2 + y^2 = C_2$.

Um conjunto de dois primeiros integrais independentes dá-nos o integral geral do sistema (23):

$$3t + 4x + 5y = C_1, \quad t^2 + x^2 + y^2 = C_2.$$

Assim, o sistema (23) está resolvido.

Resolva os seguintes sistemas de equações diferenciais:

794. $\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{ty}$.

795. $\frac{dt}{xy} = \frac{dx}{yt} = \frac{dy}{xt}$.

796. $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dp}{q} = -\frac{dq}{p}$.

797. $\frac{dx}{xt} = \frac{dy}{-yt} = \frac{dt}{xy}$.

798. $\frac{dt}{t^2 - x^2 - y^2} = \frac{dx}{2tx} = \frac{dy}{2ty}$.

799. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{3t - 4y}{2y - 3x}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{4x - 2t}{2y - 3x}. \end{cases}$

800. $\begin{cases} t\,dx = (t - 2x)\,dt, \\ t\,dy = (tx + ty + 2x - t)\,dt. \end{cases}$

801. $\frac{t\,dt}{x^2 - 2xy - x^2} = \frac{dx}{x + y} = \frac{dy}{x - y}$.

22. INTEGRAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES HOMOGÉNEOS COM COEFICIENTES CONSTANTES. MÉTODO DE EULER

Chama-se sistema linear homogéneo com coeficientes constantes a um sistema de equações diferenciais com a seguinte forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

onde os coeficientes a_{ik} são constantes e $x_k(t)$ são as funções de t procuradas.

O sistema (1) pode ser escrito abreviadamente na forma matricial:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \qquad (2)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \; a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

A matriz-coluna

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

diz-se uma solução particular da equação (2) no intervalo (a, b) se for verdadeira a identidade

$$\frac{dY}{dt} \equiv AY(t) \quad \text{para} \quad a < t < b.$$

O sistema de soluções particulares

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_1^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x_1^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2^{(1)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x_2^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \ldots, \quad X_n(t) = \begin{pmatrix} x_n^{(1)}(t) \\ x_n^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

diz-se fundamental no intervalo (a, b) se o seu wronskiano for diferente de zero, para todo o $t \in (a, b)$:

$$W(t) \equiv W(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}t \; x_2^{(1)}t \cdots x_n^{(1)}t \\ x_1^{(2)}t \; x_2^{(2)}t \cdots x_n^{(2)}t \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{(n)}t \; x_2^{(n)}t \cdots x_n^{(n)}t \end{vmatrix} \neq 0.$$

(Ao utilizarmos a notação x_i^k, o índice inferior indica o número da solução, enquanto o superior indica o número da função na solução.)

TEOREMA. Se o sistema de soluções particulares da equação homogénea (2) for fundamental, então a solução geral desta equação tem a forma

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) + \cdots + C_n X_n(t)$$

onde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ são constantes arbitrárias.

Os sistemas lineares podem ser integrados de diferentes maneiras, em particular pelos métodos acima analisados: método da eliminação, determinação de combinações integráveis, etc.

Para a integração de sistemas lineares homogéneos com coeficientes constantes utiliza-se também o método de Euler.

Analisemos este método, no caso de um sistema de três equações diferenciais lineares:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + cz, \\ \frac{dy}{dt} = a_1x + b_1y + c_1z, \\ \frac{dz}{dt} = a_2x + b_2y + c_2z. \end{cases} \tag{3}$$

Procuremos a solução do sistema (3) sob a forma

$$x = \lambda e^{rt}, \quad y = \mu e^{rt}, \quad z = \nu e^{rt}, \quad \lambda, \; \mu, \; \nu, \; r \text{ — const.} \tag{4}$$

Substituindo (4) em (3) e dividindo ambos os membros por e^{rt}, obtém-se um sistema de equações lineares em ordem a λ, μ, e ν:

$$\begin{cases} (a-r)\lambda + b\mu + c\nu = 0, \\ a_1\lambda + (b_1 - r)\mu + c_1\nu = 0, \\ a_2\lambda + b_2\mu + (c_2 - r)\nu = 0. \end{cases} \tag{5}$$

O sistema (5) tem uma solução não nula se o seu determinante for igual a zero, isto é,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-r & b & c \\ a_1 & b_1 - r & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 - r \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

A equação (6) diz-se característica.

A. Suponhamos que as raízes da equação característica — r_1, r_2 e r_3 são reais e distintas. Substituindo em (5) r por r_1 e resolvendo o sistema assim obtido, obtêm-se os valores λ_1, μ_1 e ν_1. Repetindo

depois as mesmas operações com $r = r_2$, obtêm-se os números λ_2, μ_2, ν_2 e, finalmente, no caso de $r = r_3$, obtém-se λ_3, μ_3 e ν_3. A cada um dos três conjuntos de números λ, μ e ν, corresponde uma solução particular:

$$x_1 = \lambda_1 e^{r_1 t}, \quad y_1 = \mu_1 e^{r_1 t}, \quad z_1 = \nu_1 e^{r_1 t},$$
$$x_2 = \lambda_2 e^{r_2 t}, \quad y_2 = \mu_2 e^{r_2 t}, \quad z_2 = \nu_2 e^{r_2 t},$$
$$x_3 = \lambda_3 e^{r_3 t}, \quad y_3 = \mu_3 e^{r_3 t}, \quad z_3 = \nu_3 e^{r_3 t}.$$

A solução geral do sistema (3) tem a forma

$$x = C_1\lambda_1 e^{r_1 t} + C_2\lambda_2 e^{r_2 t} + C_3\lambda_3 e^{r_3 t},$$
$$y = C_1\mu_1 e^{r_1 t} + C_2\mu_2 e^{r_2 t} + C_3\mu_3 e^{r_3 t},$$
$$z = C_1\nu_1 e^{r_1 t} + C_2\nu_2 e^{r_2 t} + C_3\nu_3 e^{r_3 t}.$$

EXEMPLO 1. Resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 3z. \end{cases}$$

Resolução. A equação característica tem a forma

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 & 1 \\ -1 & 5-r & -1 \\ 1 & -1 & 3-r \end{vmatrix} = 0,$$

ou $r^3 - 11r^2 + 36r - 36 = 0$.

Às suas raízes $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 6$ correspondem os números

$$\lambda_1 = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \nu_1 = -1;$$
$$\lambda_2 = 1, \quad \mu_2 = 1, \quad \nu_2 = 1;$$
$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = -2, \quad \nu_3 = -1.$$

Eis as respectivas soluções particulares:

$$x_1 = e^{2t}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = -e^{2t};$$
$$x_2 = e^{3t}, \quad y_2 = e^{3t}, \quad z_2 = e^{3t};$$
$$x_3 = e^{6t}, \quad y_3 = -2e^{6t}, \quad z_3 = e^{6t}.$$

A solução geral do sistema é

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t},$$
$$y = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t},$$
$$z = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}.$$

B. Consideremos agora o caso em que as raízes da equação característica são complexas.

EXEMPLO 2. Resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases} \tag{7}$$

Resolução. O sistema donde se determinam λ e μ tem a forma

$$\begin{cases} (1-r)\,\lambda - 5\mu = 0, \\ 2\lambda - (1+r)\,\mu = 0. \end{cases} \tag{8}$$

A equação característica é

$$\begin{vmatrix} 1-r & -5 \\ 2 & -1-r \end{vmatrix} = 0$$

e tem as raízes $r_1 = 3i$, $r_2 = -3i$. Substituindo $r_1 = 3i$ em (8), obtêm-se duas equações para a determinação de λ_1 e λ_2:

$$(1 - 3i)\,\lambda_1 - 5\mu_1 = 0, \quad 2\lambda_1 - (1 + 3i)\,\mu_1 = 0,$$

das quais uma é consequência da outra (isto deve-se ao determinante do sistema (8) ser nulo).

Seja $\lambda_1 = 5$, $\mu_1 = 1 - 3i$, então a primeira solução particular tem a forma

$$x_1 = 5e^{3it}, \quad y_1 = (1 - 3i)\,e^{3it}. \tag{9}$$

Analogamente, substituindo em (8) a raiz $r_2 = -3i$, encontra-se a segunda solução particular:

$$x_2 = 5e^{-3it}, \quad y_2 = (1 + 3i)\,e^{-3it}. \tag{10}$$

A fim de nos desembaraçarmos dos números complexos que entram na expressão da solução (10), convém passar para um novo sistema fundamental:

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{x_1 - x_2}{2i},$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \tilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i}. \tag{11}$$

Utilizando a fórmula de Euler, $e^{\pm\alpha it} = \cos \alpha t \pm i \sin \alpha t$, das equações (9), (10) e (11) obtém-se

$$\tilde{x}_1 = 5\cos 3t, \quad \tilde{x}_2 = 5\sin 3t,$$

$$\tilde{y}_1 = \cos 3t + 3\sin 3t, \quad \tilde{y}_2 = \sin 3t - 3\cos 3t.$$

A solução geral do sistema (7) tem a forma

$$x = C_1\tilde{x}_1 + C_2\tilde{x}_2 = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t,$$

$$y = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = 5C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3\cos 3t).$$

Observação. Tendo determinado a primeira solução particular (9), poderíamos imediatamente escrever a solução geral do sistema (7), utilizando as fórmulas

$$x = C_1 \operatorname{Re} x_1 + C_2 \operatorname{Im} x_1, \quad y = C_1 \operatorname{Re} y_1 + C_2 \operatorname{Im} y_1,$$

onde $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$ representam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária do número complexo z, isto é se $z = a + bi$, então $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$.

C. Raízes múltiplas.

EXEMPLO 3. Resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x. \end{cases} \tag{12}$$

Resolução. A equação característica,

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 \\ -1 & 4-r \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad r^2 - 6r + 9 = 0$$

tem uma raiz múltipla $r_1 = r_2 = 3$.

Neste caso, deve-se procurar a solução sob a forma

$$x = (\lambda_1 + \mu_1 t)\,e^{3t}, \quad y = (\lambda_2 + \mu_2 t)\,e^{3t}. \tag{13}$$

Substituindo (13) na primeira equação do sistema (12), obtém-se

$$3(\lambda_1 + \mu_1 t) + \mu_1 = 2(\lambda_1 + \mu_1 t) + (\lambda_2 + \mu_2 t). \tag{14}$$

Igualando entre si os coeficientes de iguais potências de t nos dois membros de (14), obtém-se

$$3\lambda_1 + \mu_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2,$$

$$3\mu_1 = 2\mu_1 + \mu_2;$$

logo,

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \mu_1, \quad \mu_2 = \mu_1. \tag{15}$$

As grandezas λ_1 e μ_1 mantêm-se arbitrárias. Representando-as, respectivamente, por C_1 e C_2, obtém-se a solução geral do sistema (12):

$$x = (C_1 + C_2 t)\,e^{3t}, \quad y = (C_1 + C_2 + C_2 t)\,e^{3t}.$$

Observação. É fácil verificar que se substituirmos (13) na segunda equação do sistema (12) se obtém o mesmo resultado (15). Na realidade, da igualdade

$$\mu_2 + 3(\lambda_2 + \mu_2 t) = 4(\lambda_2 + \mu_2 t) - (\lambda_1 + \mu_1 t)$$

obtêm-se duas equações, que exprimem λ_2 e μ_2 em função de λ_1 e μ_1:

$$\mu_2 + 3\lambda_2 = 4\lambda_2 - \lambda_1,$$

$$3\mu_2 = 4\mu_2 - \mu_1;$$

logo $\lambda_2 = \lambda_1 + \mu_2$, $\mu_2 = \mu_1$.

EXEMPLO 4. Resolver o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z \end{cases} \tag{16}$$

com as condições iniciais $x(0) = -4,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1$.

Resolução. A equação característica, neste caso, é

$$\begin{vmatrix} -r & 8 & 0 \\ 0 & -r & -2 \\ 2 & 8 & -2-r \end{vmatrix} = 0, \text{ ou } (r+2)(r^2+16) = 0. \tag{17}$$

A equação (17) tem as seguintes raízes: $r_1 = -2$, $r_2 = 4i$, $r_3 = -4i$. A raiz real $r_1 = -2$ corresponde à solução

$$x_1 = \lambda_1 e^{-2t}, \quad y_1 = \mu_1 e^{-2t}, \quad z_1 = \nu_1 e^{-2t}. \tag{18}$$

Substituindo (18) no sistema (16) e dividindo ambos os membros por e^{-2t} obtém-se

$$-2\lambda_1 = 8\mu_1, \quad -2\mu_1 = -2\nu_1, \quad -2\nu_1 = 2\lambda_1 + 8\mu_1 - 2\nu_1;$$

logo, $\lambda_1 = -4\mu_1$, $\nu_1 = \mu_1$. Seja, por exemplo, $\mu_1 = 1$; então, $\lambda_1 = -4$, $\nu_1 = 1$ e a solução particular (18) toma a forma:

$$x_1 = -4e^{-2t}, \quad y_1 = e^{-2t}, \quad z_1 = e^{-2t}. \tag{19}$$

À raiz complexa $r = 4i$ corresponde a solução

$$x_2 = \lambda_2 e^{4it}, \quad y_2 = \mu_2 e^{4it}, \quad z_2 = \nu_2 e^{4it}.$$

Substituindo esta solução em (16) e dividindo ambos os membros por e^{4it}, obtém-se

$$4\lambda_2 = 8\mu_2, \quad 4i\mu_2 = -2\nu_2, \quad 4i\nu_2 = 2\lambda_2 + 8\mu_2 - 2\nu_2;$$

logo, $\lambda_2 = -2i\mu_2$, $\nu_2 = -2i\mu_2$. Seja, por exemplo, $\mu_2 = i$; então, $\lambda_2 = 2$, $\nu_2 = 2$ e uma solução particular correspondente à raiz r_2 é:

$$x_2 = 2e^{4it}, \quad y_2 = ie^{4it}, \quad z_2 = 2e^{4it}. \tag{20}$$

À raiz $r_3 = -4i$ corresponde a solução complexa conjugada de (20), isto é

$$x_3 = 2e^{-4it}, \quad y_3 = -ie^{4it}, \quad z_3 = 2e^{-4it}. \tag{21}$$

Atendendo a (19), (20) e (21), a solução geral do sistema é

$$\begin{aligned} x &= -4C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{4it} + 2C_3 e^{-4it}, \\ y &= C_1 e^{-2t} + 2C_2 ie^{4it} - C_3 ie^{-4it}, \\ z &= C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{4it} + 2C_3 e^{-4it}. \end{aligned} \tag{22}$$

Finalmente, identifiquemos a solução particular que satisfaz as condições iniciais $x(0) = -4$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

Quando $t = 0$, de (22) obtém-se

$$\begin{cases} -4 = -4C_1 + 2C_2 + 2C_3, \\ 0 = C_1 + C_2 i - C_3 i, \\ 1 = C_1 + 2C_2 + 2C_3, \end{cases}$$

logo, $C_1 = 1$, $C_2 = i/2$, $C_3 = -i/2$; assim, temos

$$\begin{aligned} x &= -4e^{-2t} + ie^{4it} - ie^{-4it}, \\ y &= e^{-2t} - \tfrac{1}{2}e^{i4t} - \tfrac{1}{2}e^{-i4t}, \\ z &= e^{-2t} + ie^{i4t} - ie^{-4it}. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando as fórmulas de Euler $e^{\pm\alpha it} = \cos \alpha t \pm i \sin \alpha t$, obtém-se

$$x = -4e^{-2t} - 2\sin 4t, \quad y = e^{-2t} - \cos 4t, \quad z = e^{-2t} - 2\sin 4t.$$

Pelo método de Euler, determine a solução geral dos sistemas dados e, onde for pedido, identifique a solução que satisfaz as condições iniciais dadas.

802. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$ **803.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x. \end{cases}$ **804.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

805. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 2x, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -1. \end{cases}$ **806.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1. \end{cases}$

807. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z. \end{cases}$ **808.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$

809. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -y - 2z - 3x, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1. \end{cases}$

23. MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES NÃO HOMOGÉNEOS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos o seguinte sistema linear não homogéneo com coeficientes constantes:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k(t) + f_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

que também pode ser escrito na forma matricial:

$$\frac{dX}{dt} = AX + F,$$

onde F é uma matriz-coluna, cujas componentes são as funções $f_i(t)$.

TEOREMA. A solução geral $X(t)$ de um sistema linear não homogéneo é igual à soma da solução geral $X_{gh}(t)$ do sistema homogéneo associado $dX/dt = AX$ com qualquer solução particular X_{pn} do sistema não homogéneo:

$$X(t) = X_{gh}(t) + X_{pn}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k\, X_k(t) + X_{pn}(t),$$

onde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ são constantes arbitrárias.

Vamos analisar alguns métodos de integração de sistemas lineares não homogéneos.

1.° Método da variação das constantes arbitrárias (método de Lagrange).

Para ilustrar este método, tomemos como exemplo um sistema de três equações não homogéneas. Considere-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x' + a_1x + b_1y + e_1z = f_1(t), & (1, 1) \\ y' + a_2x + b_2y + e_2z = f_2(t), & (1, 2) \\ z' + a_3x + b_3y + e_3z = f_3(t), & (1, 3) \end{cases} \qquad (1)$$

Suponhamos que a solução geral do sistema homogéneo associado já foi determinada:

$$\begin{aligned} x &= C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3, \\ y &= C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3, \\ z &= C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3. \end{aligned} \qquad (2)$$

Procuremos a solução do sistema não homogéneo (1) sob a forma:

$$\begin{aligned} x &= C_1(t)\, x_1 + C_2(t)\, x_2 + C_3(t)\, x_3, \\ y &= C_1(t)\, y_1 + C_2(t)\, y_2 + C_3(t)\, y_3, \\ z &= C_1(t)\, z_1 + C_2(t)\, z_2 + C_3(t)\, z_3, \end{aligned} \qquad (3)$$

onde $C_1(t)$, $C_2(t)$ e $C_3(t)$ são, por enquanto, funções incógnitas.

Substituamos (3) em (1); então a equação (1, 1) adquire a forma:

$$C_1' x_1 + C_2' x_2 + C_3' x_3 + C_1 (x_1' + a_1 x_1 + b_1 y_1 + e_1 z_1) + \\ + C_2 (x_2' + a_1 x_2 + b_1 y_2 + e_1 z_2) + C_3 (x_3' + a_1 x_3 + b_1 y_3 + e_1 z_3) = f_1(t). \quad (4)$$

Todas as somas que se encontram entre parêntesis se anulam, uma vez que (2) é a solução do sistema homogéneo associado. Assim, obtemos

$$C_1' x_1 + C_2' x_2 + C_3' x_3 = f_1(t). \quad (5)$$

Do mesmo modo, depois de substituirmos (3) nas equações (1, 2) e (1, 3) obtemos

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_3' y_3 = f_2(t), \\ C_1' z_1 + C_2' z_2 + C_3' z_3 = f_3(t). \quad (6)$$

O sistema de equações (5)-(6) tem solução, uma vez que o seu determinante é diferente de zero:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Isto resulta da Independência linear das soluções particulares da equação homogénea associada. Tendo determinado $C_1'(t)$, $C_2'(t)$, $C_3'(t)$, obtêm-se $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$ por integração; deste modo, determinamos a solução (3) do sistema (1).

EXEMPLO 1. Pelo método da variação das constantes, resolva o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 1 + 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = \frac{3}{2} t^2. \end{cases} \quad (7)$$

Resolução. Comecemos por resolver o sistema homogéneo associado

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Da segunda equação do sistema (8) resulta

$$x = y - \frac{dy}{dt}, \text{ pelo que } \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Substituamos estas expressões de x e dx/dt na primeira equação do sistema (8):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0;$$

a solução geral desta equação é

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}.$$

Uma vez que $x = y - \dfrac{dy}{dt}$, obtém-se

$$x = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t}.$$

A solução geral do sistema homogéneo (8) é

$$x = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t}, \quad y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}.$$

Vamos procurar a solução do sistema não homogéneo (7) sob a forma

$$x = -C_1(t) e^{2t} + 4C_2(t) e^{-3t}, \quad y = C_1(t) e^{2t} + C_2(t) e^{-3t}. \quad (9)$$

Substituindo (7) em (9) e reduzindo os termos semelhantes, obtém-se

$$\begin{cases} -C_1'(t) e^{2t} + 4C_2'(t) e^{-3t} = 1 + 4t, \\ C_1'(t) e^{2t} + C_2'(t) e^{-3t} = \frac{3}{2} t^2. \end{cases}$$

Donde resulta

$$C_1'(t) = \frac{(6t^2 - 4t - 1) e^{-2t}}{5}, \quad C_2'(t) = \frac{(3t^2 + 8t + 2) e^{3t}}{10}.$$

Integrando, obtém-se

$$C_1(t) = -\tfrac{1}{5}(t + 3t^2) e^{-2t} + C_1, \\ C_2(t) = \tfrac{1}{10}(2t + t^2) e^{3t} + C_2, \quad (10)$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Substituindo (10) em (9), obtém-se a solução geral do sistema (7):

$$x=-C_1\,e^{2t}+4C_2\,e^{-3t}+t+t^2,\quad y=C_1\,e^{2t}+C_2\,e^{-3t}-\tfrac{1}{2}t^2.$$

Pelo método da variação das constantes arbitrárias, determine a solução geral dos seguintes sistemas não homogéneos:

810. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+2x-y=-e^{2t},\\ \dfrac{dy}{dt}+3x-2y=6e^{2t}.\end{cases}$

811. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y-\cos t,\\ \dfrac{dy}{dt}=-y-2x+\cos t+\sin t,\quad x(0)=1,\quad y(0)=-2.\end{cases}$

812. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+\mathrm{tg}^2\,t-1,\\ \dfrac{dy}{dt}=\mathrm{tg}\,t-x.\end{cases}$

813. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-4x-2y+\dfrac{2}{e^t-1},\\ \dfrac{dy}{dt}=6x+3y-\dfrac{3}{e^t-1}.\end{cases}$

814. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+\dfrac{1}{\cos t}.\end{cases}$

2.° Método dos coeficientes indeterminados (método da selecção).

Este método pode ser aplicado à resolução de um sistema linear não homogéneo quando as funções $f_i(t)$, que figuram no segundo membro do sistema, têm certas formas especiais: polinómios $P_k(t)$, funções exponenciais $e^{\alpha t}$, senos e cosenos ($\sin\beta t$ e $\cos\beta t$), ou ainda produtos destas funções. Conhecendo o segundo membro do sistema, determina-se uma solução particular x_{kp} do sistema não homogéneo. (Ver Tabela 1.) Vamos ilustrar a aplicação deste método com alguns exemplos.

EXEMPLO 2. Determine a solução geral do sistema não linear:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-2y+e^t,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+4y+e^{2t}.\end{cases}\qquad(11)$$

Resolução. Comecemos por determinar a solução do sistema homogéneo associado:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+4y.\end{cases}\qquad(12)$$

A equação característica tem a forma

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad \text{ou}\quad \lambda^2-5\lambda+6=0.$$

As raízes desta equação são $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$. À raiz $\lambda_1=2$ corresponde a seguinte solução particular:

$$x_1=\mu_1\,e^{2t},\quad y_1=\nu_1\,e^{2t}.$$

Substituindo x_1 e y_1 em (12), obtém-se um sistema de equações do qual se determinam μ_1 e ν_1:

$$-\mu_1-2\nu_1=0,\quad -\mu_1+2\nu_1=0.$$

Estas igualdades são satisfeitas, em particular, se $\mu_1=2$, $\nu_1=-1$, de tal modo que a primeira solução particular do sistema não homogéneo (11) é

$$x_1=2e^{2t},\quad y_1=-e^{2t}.$$

À raiz $\lambda_2=3$ corresponde a solução particular

$$x_2=\mu_2\,e^{3t},\quad y_2=\nu_2\,e^{3t}.$$

Os números μ_2 e ν_2 obtêm-se resolvendo o sistema

$$\begin{cases}-2\mu_2-2\nu_2=0,\\ \mu_2+\nu_2=0,\end{cases}$$

o qual é satisfeito, por exemplo, se $\mu_2=1$, $\nu_2=-1$. Então a segunda solução particular do sistema (12) é

$$x_2=e^{3t},\quad y_2=-e^{3t}.$$

Deste modo, a solução geral do sistema homogéneo (12) tem a forma:

$$\tilde{x}=2C_1\,e^{2t}+C_2\,e^{3t},\quad \tilde{y}=-C_1\,e^{2t}-C_2\,e^{3t}.$$

Determinemos agora, pelo método dos coeficientes indeterminados, uma solução particular do sistema não homogéneo (11). Sabendo que as funções do segundo membro deste sistema são $f_1(t)=e^t$ e $f_2(t)=e^{2t}$, a forma duma solução particular é (ver Tabela 1).

$$x_{p,n}=K\,e^t+(Lt+M)\,e^{2t},\quad y_{p,n}=N\,e^t+(Pt+Q)\,e^{2t}.\qquad(13)$$

Substituindo (13) em (11), temos

$$Ke^t + 2(Lt+M)e^{2t} + Le^{2t} = Ke^t + (Lt+M)e^{2t} - 2Ne^t - 2(Pt+Q)e^{2t} + e^t,$$

$$Ne^t + 2(Pt+Q)e^{2t} + Pe^{2t} = Ke^t + (Lt+M)e^{2t} + 4Ne^t + 4(Pt+Q)e^{2t} + e^{2t}.$$

Igualando entre si os coeficientes de e^t, e^{2t} e te^{2t} em ambos os membros destas equações obtém-se, para a primeira equação,

$$\begin{array}{r|l} e^t & K = K - 2N + 1, \\ e^{2t} & 2M + L = M - 2Q, \\ te^{2t} & 2L = L - 2P, \end{array}$$

para a segunda equação,

$$\begin{array}{r|l} e^t & N = K + 4N, \\ e^{2t} & 2Q + P = M + 4Q + 1, \\ te^{2t} & 2P = L + 4P. \end{array}$$

Resolvendo o sistema de equações assim obtido, temos $K = -3/2$, $L = 2$, $M = 0$, $N = 1/2$, $P = -1$, $Q = -1$. Logo, a solução particular (13) tem a forma

$$x_{p,n} = -\tfrac{3}{2}e^t + 2te^{2t}, \quad y_{p,n} = \tfrac{1}{2}e^t - (t+1)e^{2t}.$$

Por conseguinte, a solução do sistema não homogéneo é

$$x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} - \tfrac{3}{2}e^t + 2te^{2t},$$

$$y = -C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} + \tfrac{1}{2}e^t - (t+1)e^{2t}.$$

EXEMPLO 3. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 5\sin t. \end{cases} \tag{14}$$

Resolução. A equação característica, neste caso, é

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

As raízes da equação característica são $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. A solução geral do sistema homogéneo associado é

$$\tilde{x} = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}, \quad \tilde{y} = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}.$$

Determinemos uma solução particular do sistema não homogéneo (14), atendendo a que $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = -5 \sin t$. As componentes $x_{p,n}$ e $y_{p,n}$ da solução particular vão ter a forma:

$$x_{p,n} = A\cos t + B\sin t, \quad y_{p,n} = M\cos t + N\sin t;$$

substituindo no sistema (14), obtém-se

$$-A\sin t + B\cos t = A\cos t + B\sin t + 2M\cos t + 2N\sin t,$$

$$-M\sin t + N\cos t = A\cos t + B\sin t - 5\sin t.$$

Igualemos entre si os coeficientes de $\sin t$ e $\cos t$ em ambos os membros das equações:

$$\begin{cases} -A = B + 2N, \\ B = A + 2M, \\ -M = B - 5, \\ N = A, \end{cases}$$

daqui resulta que $A = -1$, $B = 3$, $M = 2$, $N = 1$; logo,

$$x_{p,n} = -\cos t + 3\sin t, \quad y_{p,n} = 2\cos t - \sin t.$$

A solução geral do sistema dado é

$$x = \tilde{x} + x_{p,n} = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - \cos t + 3\sin t,$$

$$y = \tilde{y} + y_{p,n} = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 2\cos t - \sin t.$$

EXEMPLO 4. Resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 16te^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases} \tag{15}$$

Resolução. A equação característica é

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda^2+\lambda-6=0.$$

As raízes desta equação são $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$. A solução geral do sistema homogéneo, associado a (15), é

$$\tilde{x} = 2C_1\,e^{2t} + C_2\,e^{-3t}, \quad \tilde{y} = C_1\,e^{2t} - 2C_2\,e^{-3t}.$$

Vamos procurar uma solução particular do sistema não homogéneo (15) com a forma

$$x_{p,n} = (At+B)\,e^t, \quad y_{p,n} = (Mt+N)\,e^t. \qquad (16)$$

Substituindo (16) no sistema (15) e dividindo ambos os membros por e^t, obtém-se

$$At+B+A = At+B+2Mt+2N+16t$$
$$Mt+N+M = 2At+2B-2Mt-2N,$$

daqui resulta que $A=-12$, $B=-13$, $M=-8$, $N=-6$; logo,

$$x_{p,n} = -(12t+13)\,e^t, \quad y_{p,n} = -(8t+6)\,e^t.$$

A solução do sistema não homogéneo é

$$x = \tilde{x} + x_{p,n} = 2C_1\,e^{2t} + C_2\,e^{-3t} - (12t+13)\,e^t,$$
$$y = \tilde{y} + y_{p,n} = C_1\,e^{2t} - 2C_2\,e^{-3t} - (8t+6)\,e^t. \quad \blacklozenge$$

Integre os seguintes sistemas lineares não homogéneos com coeficientes constantes:

815. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1-x. \end{cases}$

816. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3-2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x-2t. \end{cases}$

817. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y+\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x+\cos t. \end{cases}$

818. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x+y+e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x+y-e^t. \end{cases}$

819. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x-5y+4t-1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x-2y+t, \quad x(0)=y(0)=0. \end{cases}$

820. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y-x+e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x-y+e^t, \quad x(0)=y(0)=1. \end{cases}$

821. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = t^2, \\ \dfrac{dy}{dt} - x = t. \end{cases}$

822. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + y = e^{-t}, \\ 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y = \sin t. \end{cases}$

823. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x+y-2z+2-t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1-x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x+y-z+1-t. \end{cases}$

824. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x+2y = 2e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} + y+z = 1, \\ \dfrac{dz}{dt} + z = 1, \quad x(0)=y(0)=z(0)=1. \end{cases}$

3.° Construção de combinações integráveis (método de D'Alembert).

Este método serve para construir combinações integráveis durante a resolução de sistemas de equações lineares com coeficientes constantes. Vamos mostrar como ele se aplica à resolução de sistemas de duas equações:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x+b_1y+f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x+b_2y+f_2(t). \end{cases} \qquad (17)$$

Multipliquemos a segunda equação por um certo número λ e somemo-la, termo a termo, com a primeira:

$$\frac{d(x+\lambda y)}{dt} = (a_1+\lambda a_2)\,x + (b_1+\lambda b_2)\,y + f_1(t) + \lambda f_2(t).$$

Esta última equação também pode ser escrita sob a forma:

$$\frac{d(x+\lambda y)}{dt} = (a_1+\lambda a_2)\left(x + \frac{b_1+\lambda b_2}{a_1+\lambda a_2}\,y\right) + f_1(t) + \lambda f_2(t). \qquad (18)$$

Se escolhermos o número λ de tal modo que verifique

$$\frac{b_1+\lambda b_2}{a_1+\lambda a_2} = \lambda. \qquad (19)$$

Então a equação (18) reduz-se a uma equação linear, em relação a $x+\lambda y$:

$$\frac{d(x+\lambda y)}{dt} = (a_1+\lambda a_2)(x+\lambda y) + f_1(t) + \lambda f_2(t).$$

Integrando esta última equação, obtém-se

$$x+\lambda y = e^{(a_1+\lambda a_2)t}\left\{C+\int\left[f_1(t)+\lambda f_2(t)\right]e^{-(a_1+\lambda a_2)t}\,dt\right\}. \tag{20}$$

Se a equação (19) tiver duas raízes distintas λ_1 e λ_2, a partir de (20) deduzem-se dois primeiros integrais do sistema (17), pelo que a integração do sistema fica assim concluída.

EXEMPLO 5. Pelo método de D'Alembert, resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=5x+4y+e^t,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=4x+5y+1.\end{cases} \tag{21}$$

Resolução. Escolha-se λ de acordo com a equação (19): $4+5\lambda=\lambda(5+4\lambda)$, donde resulta $\lambda_{1,2}=\pm 1$.

Então, de acordo com a fórmula (20), no caso de $\lambda=1$ temos

$$x+y=e^{(5+4\cdot 1)t}\left\{C_1+\int(e^t+1)\,e^{-(5+4\cdot 1)t}dt\right\}=e^{9t}\left\{C_1+\int(e^{-8t}+e^{-9t})\,dt\right\}=C_1\,e^{9t}-\tfrac{1}{8}e^t-\tfrac{1}{9}.$$

Analogamente, no caso de $\lambda=-1$, obtém-se

$$x-y=e^{(5-4)t}\left\{C_2+\int(e^t+1)\,e^{-(5+4\cdot 1)t}dt\right\}=C_2\,e^t+t\,e^t+1.$$

Obtivemos assim dois primeiros integrais independentes do sistema (21):

$$\left(x+y+\tfrac{1}{8}e^t+\tfrac{1}{9}\right)e^{-9t}=C_1,\quad (x-y-t\,e^t-1)\,e^{-t}=C_2.$$

Fica deste modo concluída a resolução do sistema.

Observação. Se o segundo membro de um sistema normal tiver a forma $\dfrac{ax+by+cz+P(t)}{t}$, onde a, b e c são constantes, e $P(t)$ é um polinómio em t, então a substituição $t=e^\tau$ conduz-nos a um sistema com coeficientes constantes.

EXEMPLO 6. Resolver o sistema de equações

$$\begin{cases}t\dfrac{dx}{dt}=-2x+2y+t,\\[2mm] t\dfrac{dy}{dt}=-x-5y+t^2.\end{cases}$$

Resolução. Façamos a substituição de variável $t=e^\tau$. Então

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{t}\cdot\frac{dx}{d\tau};\quad \frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}\cdot\frac{dy}{d\tau}$$

e o sistema adquire a forma

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\tau}=-2x+2y+e^\tau,\\[2mm] \dfrac{dy}{d\tau}=-x-5y+e^{2\tau}.\end{cases} \tag{22}$$

Para resolver o sistema (22), apliquemos o método de D' Alembert. Multipliquemos a segunda equação do sistema por λ e somemo-la com a primeira:

$$\frac{d}{d\tau}(x+\lambda y)=(-2-\lambda)\,x+(2-5\lambda)\,y+e^\tau+\lambda\,e^{2t}$$

ou

$$\frac{d}{d\tau}(x+\lambda y)=(-2-\lambda)\left[x+\frac{2-5\lambda}{-2-\lambda}y\right]+e^\tau+\lambda\,e^{2t}. \tag{23}$$

Escolhamos λ de tal modo que o coeficiente de y na expressão entre parêntesis rectos seja igual a λ, isto é $\dfrac{2-5\lambda}{-2-\lambda}=\lambda$, ou $\lambda^2-3\lambda+2=0$, donde $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. No caso de $\lambda_1=1$, a equação (23) dá-nos

$$\frac{d(x+y)}{d\tau}=-3(x+y)+e^\tau+e^{2\tau},$$

donde, de acordo com a fórmula (20), teremos

$$x+y=e^{-3\tau}\left[C_1+\int(e^\tau+e^{2\tau})\,e^{3\tau}\,d\tau\right].$$

Depois de integrarmos, obtém-se

$$x+y=C_1\,e^{-3\tau}+\tfrac{1}{4}e^\tau+\tfrac{1}{5}e^{2\tau}. \tag{24}$$

Analogamente, no caso de $\lambda_2=2$, de (23) obtém-se

$$x+2y=C_2\,e^{-4\tau}+\tfrac{1}{5}e^\tau+\tfrac{1}{3}e^{2\tau}. \tag{25}$$

Resolvendo o sistema (24)-(25) em ordem a x e a y, obtém-se a solução geral do sistema (22):

$$x = 2C_1 e^{-3\tau} - C_2 e^{-4\tau} + 0{,}3\,e^{\tau} + \tfrac{1}{13} e^{2\tau}. \tag{26}$$

$$y = -C_1 e^{-3\tau} + C_2 e^{-4\tau} - 0{,}05\,e^{\tau} + \tfrac{2}{13} e^{2\tau}. \tag{27}$$

Regressando à variável t ($e^{\tau} = t$), obtém-se a solução geral do sistema dado:

$$x = \frac{2C_1}{t^3} - \frac{C_2}{t^4} + \frac{3t}{10} + \frac{t^2}{15}. \tag{28}$$

$$y = -\frac{C_1}{t^3} + \frac{C_2}{t^4} - \frac{t}{20} + \frac{2t^2}{15}. \tag{29}$$

Pelo método de D'Alembert, resolver os seguintes sistemas de equações:

825. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

826. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y. \end{cases}$

827. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y. \end{cases}$

828. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - e^t. \end{cases}$

829. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$

24. APLICAÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE À RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES E SISTEMAS

1.° Noções gerais sobre a transformação de Laplace.

A original e a transformada. Diz-se função original a função $f(t)$, de valores complexos e variável real t, que satisfaz as seguintes condições:

1) $f(t) = 0$, se $t < 0$;

2) $f(t)$ é integrável em qualquer intervalo finito do eixo dos t;

3) Quando t aumenta, o módulo da função $f(t)$ cresce não mais rapidamente do que uma certa função exponencial. Isto é, existem números $M > 0$ e $s_0 > 0$, tais que para qualquer t se verifica

$$|f(t)| \le M e^{s_0 t}. \tag{1}$$

Chama-se transformada da original segundo Laplace (ou, simplesmente, transformada de Laplace) à função $F(p)$ de variável complexa $p = s + i\sigma$ que se define pela igualdade

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{2}$$

onde Re $p > s_0$. A condição 3) garante a existência do integral (2).

A transformação (2), que faz corresponder a cada original $f(t)$ a sua transformada $F(p)$, denomina-se transformação de Laplace. Utiliza-se a notação $f(t) \doteqdot F(p)$.

Propriedades da transformação de Laplace. No texto que se segue, considera-se sempre que

$$f(t) \doteqdot F(p), \quad g(t) \doteqdot G(p). \tag{3}$$

I. Linearidade. Para quaisquer constantes complexas α e β, verifica-se

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p). \tag{4}$$

II. Teorema da semelhança. Para qualquer constante $\alpha > 0$,

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{5}$$

III. Diferenciação da original. Se $f'(t)$ for a original, então

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0). \tag{6}$$

Generalização. Se $f(t)$ for n vezes continuamente diferenciável em $(0, +\infty)$ e se $f^{(n)}(t)$ for a original, então

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0). \tag{7}$$

IV. A derivada da transformada é igual à original, multiplicada por $-t$, isto é

$$F'(p) \doteqdot -t f(t). \tag{8}$$

Generalização:

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n t^n f(t). \qquad (9)$$

V. A integração da original é equivalente à divisão da transformada por p:

$$\int_0^t f(t)\, dt \doteqdot \frac{F(p)}{p}. \qquad (10)$$

VI. A integração da transformada é equivalente é equivalente à divisão da original por t:

$$\int_p^t F(p)\, dp \doteqdot \frac{f(t)}{t} \qquad (11)$$

(pressupõe-se que o integral $\int_p^\infty F(p)\, dp$ converge).

VII. Teorema do retardamento. Para qualquer número positivo

$$f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau} F(p). \qquad (12)$$

VIII. Teorema da deslocação (multiplicação da original pela função exponencial). Para qualquer número complexo

$$e^{\lambda t} f(t) \doteqdot e^{-p\tau} F(p-\lambda). \qquad (13)$$

IX. Teorema da multiplicação (E. Borel). O produto de duas transformadas $F(p)$ e $G(p)$ **também é uma transformada, nomeadamente,**

$$\int_p^\infty F(p)\, G(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau. \qquad (14)$$

O integral do segundo membro de (14) denomina-se convolução das funções $f(t)$ e $g(t)$ e é representado pelo símbolo

$$(f * g) = \int_p^\infty f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau.$$

O teorema IX afirma que a multiplicação das transformadas é equivalente à convolução das originais, isto é

$$F(p)\, G(p) \doteqdot (f * g). \qquad (15)$$

Determinação das originais de transformadas racionais. A fim de determinar a original $f(t)$, sendo conhecida a transformada $F(p)$, onde $F(p) = A(p)/B(p)$ é uma fracção racional própria, utilizam-se os seguintes métodos:

1) Esta fracção é decomposta numa soma de fracções elementares e, utilizando as propriedades I-IX da transformação de Laplace, determina-se a original de cada uma delas.

2) **Determinam-se os pólos p_k da fracção (ver [2]) e as respectivas multiplicidades n_k. Então a original de $F(p)$ é a função**

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(n_k-1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \left\{ F(p)(p-p_k)^{n_k} e^{pt} \right\}, \qquad (16)$$

onde a soma abrange todos os pólos da função $F(p)$.

No caso de todos os pólos serem simples, isto é, $n_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, a fórmula (16) simplifica-se, adquirindo o seguinte aspecto:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \qquad (17)$$

EXEMPLO 1. Determinar a original $f(t)$, sabendo que

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}.$$

Resolução — Primeiro método. Representemos $F(p)$ sob a forma de soma de funções elementares

$$\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{Cp+D}{p^2+4}$$

e calculemos os coeficientes indeterminados A, B, C, D. Temos

$$p+2 = A(p-2)(p^2+4) + B(p+1)(p^2+4) + (Cp+D)(p+1)(p-2).$$

Se na última igualdade substituirmos, sucessivamente, $p = -1$, $p = 2$, $p = 2i$, obtém-se $-15A = 1$, $24B = 4$,

$$(2Ci + D)(2i+1)(2i-2) = 2 + 2i,$$

donde resulta $A = -1/15$, $B = 1/6$, $C = -1/10$, $D = -2/5$; logo,

$$F(p) = -\frac{1}{15}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{p-2} - \frac{1}{10}\frac{p+4}{p^2+4}.$$

Tendo determinado as originais de cada uma das fracções elementares, com base na linearidade, obtém-se

$$f(t) = -\tfrac{1}{15}e^{-t} + \tfrac{1}{6}e^{2t} - \tfrac{1}{10}\cos 2t - \tfrac{1}{5}\sin 2t.$$

Resolução — Segundo método. Determinemos os pólos p_k da função $F(p)$. Estes correspondem aos zeros do denominador $B(p) = (p+1)(p-2)(p^2+4)$. Deste modo, a transformada $F(p)$ tem quatro pólos simples: $p_1 = -1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 2i$, $p_4 = -2i$. Utilizando a fórmula (17), obtém-se a original

$$f(t) = \sum_{k=1}^{4} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} = \sum_{k=1}^{4} \frac{p_k + 2}{4p_k^3 - 3p_k^2 + 4p - 4} e^{p_k t} = -\tfrac{1}{15}e^{-t} + \tfrac{1}{6}e^{2t} +$$

$$+ \frac{-1+2i}{20}e^{2it} + \frac{-1-2i}{20}e^{-2it} = \tfrac{1}{6}e^{2t} - \tfrac{1}{15}e^{-t} - \tfrac{1}{10}\cos 2t - \tfrac{1}{5}\sin 2t.$$

EXEMPLO 2. Determinar o original $f(t)$, sabendo que $F(p) = \dfrac{p+2}{p^3(p-1)^2}$.

Resolução. A fracção $F(p)$ dada tem um pólo $p_1 = 0$ de multiplicidade $n_1 = 3$ e um pólo $p_2 = 1$ de multiplicidade $n_2 = 2$. Utilizando a fórmula (16), obtém-se a original

$$f(t) = \tfrac{1}{2}\lim_{p\to 0} \frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{p+2}{p^3(p-1)^2}p^3 e^{pt}\right] + \lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left[\frac{p+2}{p^3(p-1)^2}(p-1)^2 e^{pt}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\lim_{p\to 0}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{p+2}{(p-1)^2}e^{pt}\right] + \lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left[\frac{p+2}{p^3}e^{pt}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left\{\left[\frac{2p+16}{(p-1)^4} - \frac{2t(p+5)}{(p-1)^3} + \frac{t^2(p+2)}{(p-1)^2}\right]e^{pt}\right\} +$$

$$+ \lim_{p\to 1}\left\{\left[\frac{t(p+2)}{p^3} - \frac{3p^2+5p}{p^4}\right]e^{pt}\right\} = 8 + 5t + t^2 + (3t-8)e^t.$$

2.° Resolução do problema de Cauchy para equações diferenciais lineares com coeficientes constantes.

Procuremos a solução da equação de segunda ordem com coeficientes constantes

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t) \qquad (18)$$

que satisfaz as condições iniciais

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1. \qquad (19)$$

Vamos supor que a função $f(t)$ e a solução $x(t)$, tal como as suas derivadas, até à segunda ordem (inclusive) são funções originais. Seja $x(t) \risingdotseq X(p)$, $f(t) = F(p)$. Segundo a regra de diferenciação das originais, de acordo com (2), temos

$$x'(t) = pX(p) - x_0, \quad x''(t) = p^2X(p) - px_0 - x_1.$$

Aplicando a ambos os membros de (18) a transformação de Laplace e utilizando a linearidade da transformação, deduz-se a equação operacional (*)

$$(p^2 + a_1 p + a_2)X(p) = F(p) + x_1(p + a_1) + x_1. \qquad (20)$$

Resolvendo a equação (20), obtém-se a solução operacional

$$X(p) = \frac{F(p) + x_0(p + a_1) + x_1}{p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Depois de determinar a original de $X(p)$, obtém-se a resolução da equação (18) que satisfaz as condições iniciais (19).

Do mesmo modo se pode resolver qualquer equação de ordem n com coeficientes constantes e com condições iniciais dadas em $t = 0$.

EXEMPLO 3. Resolva a equação

$$x' + x = 1, \qquad (21)$$

$$x(0) = 1. \qquad (22)$$

Resolução. Seja $x(t) \risingdotseq X(p)$, então, pela regra de diferenciação da original, temos

$$x'(t) \risingdotseq X(p) - x(0) = pX(p) - 1.$$

Sabe-se que $1 \risingdotseq {}^1/_p$, pelo que, passando do problema dado (21) – (22) para a equação operacional, temos

$$pX(p) - 1 + X(p) = {}^1/p.$$

(*) A equação (20) é a equação satisfeita pela transformada de Laplace da solução do problema de Cauchy (18)-(19). Embora na literatura em português não seja habitualmente utilizada nenhuma designação especial para esta equação, optámos por utilizar a expressão "equação operacional", por ser aquela que nos parece traduzir melhor o sentido do termo russo utilizado pelo autor. (N. do T.)

logo,

$$(p+1)\,X(p)=1+\frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad X(p)=\frac{1}{p},$$

e, por conseguinte, $x(t) \equiv 1$.

Verifica-se facilmente que a função $x(t) \equiv 1$ satisfaz a equação dada e a condição inicial do problema.

EXEMPLO 4. Resolva a equação $x'' - 5x' + 4x = 4$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$. Uma vez que $4 \risingdotseq {}^4/p$ e, de acordo com as condições, $x_0 = x(0) = 0$, $x_1 = x'(0) = 2$, a equação operacional tem a forma $(p^2 - 5p + 4)\,X(p) = {}^4/p + 2$. Daqui obtém-se a solução operacional

$$X(p)=\frac{2p+4}{p(p^2-5p+4)}.$$

Façamos a decomposição da fracção racional do segundo membro em fracções elementares

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{2}{p-1}+\frac{1}{p-4}.$$

Passando às originais, obtém-se a solução procurada

$$x(t) = 1 - 2e^t + e^{4t}.$$

EXEMPLO 5. Resolva a equação

$$x'' + 4x' + 4x = 8e^{-2t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$$

Resolução. Uma vez que $8e^{-2t} \risingdotseq \dfrac{8}{p+2}$ e, de acordo com as condições iniciais, $x_0 = x_1 = 1$, a equação operacional tem a forma

$$(p^2+4p+4)\,X(p)=\frac{8}{p+2}+p+4+1,$$

e, por conseguinte, a solução operacional é

$$X(p)=\frac{p^2+7p+18}{(p+2)^3}.$$

Decompondo o segundo membro em fracções elementares, obtém-se

$$X(p)=\frac{8}{(p+2)^3}+\frac{3}{(p+2)^2}+\frac{1}{p+2}.$$

Regressando às originais, obtém-se a solução do problema considerado:

$$x(t) = 4t^2e^{-2t} + 3te^{-2t} + e^{-2t}.$$

Resolva as seguintes equações:

830. $x'+3x = e^{-2t}$, $x(0) = 0$.

831. $x'-3x = 3t^3+3t^2+2t+1$, $x(0) = -1$.

832. $x'-x=\cos t-\sin t$, $x(0)=0$.

833. $2x'+6x=te^{-3t}$, $x(0)=-1/2$.

834. $x'+x=2\sin t$, $x(0)=0$.

835. $x''=0$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

836. $x''=1$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

837. $x''=\cos t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

838. $x''+x'=0$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

839. $x''+x'=0$, $x(0)=1$, $x'(0)=-1$.

840. $x''-x'=1$, $x(0)=-1$, $x'(0)=-1$.

841. $x''+x'=t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

842. $x''+6x'=12t+2$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

843. $x''-2x'+2x=2$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

844. $x''+4x'+4x=4$, $x(0)=1$, $x'(0)=-4$.

845. $2x''-2x'=(t+1)e^t$, $x(0)=1/2$, $x'(0)=1/2$.

846. $x''+x=2\cos t$, $x(0)=-1$, $x'(0)=1$.

847. $x''+3x'+2x=2t^2+1$, $x(0)=4$, $x'(0)=-3$.

848. $x''+x'=2e^t$, $x(0)=1$, $x'(0)=2$.

849. $x''-4x'+4x=(t-1)e^{2t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

850. $4x''-4x'+x=e^{t/2}$, $x(0)=-2$, $x'(0)=0$.

851. $x''+3x'+2x=e^{-t}+e^{-2t}$, $x(0)=2$, $x'(0)=-3$.

852. $x''-x'-6x=6e^{3t}+2e^{-2t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=4/5$.

853. $x''+4x'+4x=t^2 e^{-2t}$, $x(0)=x'(0)=0$.

854. $x''-x'=2\sin t$, $x(0)=2$, $x'(0)=0$.

855. $x''+9x=18\cos 3t$, $x(0)=0$, $x'(0)=9$.

856. $x''+4x=4\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1/8$.

857. $x''+2x'+3x=t\cos t$, $x(0)=-1/4$, $x'(0)=0$.

858. $x''-4x'+5x=2e^{2t}(\sin t+\cos t)$, $x(0)=1$, $x'(0)=2$.

859. $x'''-x''=0$, $x(0)=1$, $x'(0)=3$, $x''(0)=2$.

860. $x'''-4x'=1$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1/4$, $x''(0)=0$.

861. $x'''+x''-2x=5e^t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$, $x''(0)=2$.

862. $x''+x=8\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$, $x(0)=0$, $x'(0)=-4$.

863. $x''+4x=2\cos^2 t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

3.° Resolução de sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes.

Vamos procurar a solução de um sistema de duas equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_1x+b_1+f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt}=a_2x+b_2y+f_2(t), \end{cases} \tag{23}$$

que satisfaz as seguintes condições iniciais:

$$x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0. \tag{24}$$

Suponhamos que as funções $f_1(t), f_2(t), x(t), y(t)$, assim como $x'(t)$ e $y'(t)$, são funções originais. Seja

$$x(t) \doteqdot X(p), \quad y(t) \doteqdot Y(p), \quad f_1(t) \doteqdot F_1(p), \quad f_2(t) \doteqdot F_2(p).$$

Segundo a regra de diferenciação das originais, atendendo a (24), temos

$$x'(t) \doteqdot pX(p)-x_0, \quad y'(t) \doteqdot pY(p)-y_0.$$

Aplicando a ambos os membros de cada equação do sistema (23) a transformação de Laplace, obtém-se o sistema operacional:

$$\begin{cases} pX(p)=a_1X(p)+b_1Y(p)+F_1(p)+x_0, \\ pY(p)=a_2X(p)+b_2Y(p)+F_2(p)+y_0. \end{cases}$$

Trata-se de um sistema algébrico linear de duas equações a duas incógnitas $X(p)$ e $Y(p)$. Resolvendo-o obtém-se $X(p)$ e $Y(p)$, após o que, regressando às originais, se determina a solução $x(t), y(t)$ do sistema (23) que satisfaz as condições iniciais (24). Do mesmo modo se resolvem os sistemas lineares do tipo

$$\frac{dx_k}{dt}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\,x_l+f_k(t), \quad a_{kl}=\text{const}, \quad x_k(0)=x_k^0, \quad k=1,2,\ldots,n.$$

EXEMPLO 6. Calcular a solução do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-7x+y+5, \\ \dfrac{dy}{dt}=-2x-5y-37t, \end{cases}$$

que satisfaz a condição inicial $x(0)=0$, $y(0)=0$.

Resolução. Uma vez que $5 \doteqdot 5/p$, $-37t \doteqdot 37/p^2$ e $x_0=y_0=0$, o sistema operacional tem a forma

$$\begin{cases} pX(p)=-7x(p)+Y(p)+\dfrac{5}{p}, \\ pY(p)=-2X(p)-5Y(p)-\dfrac{37}{p^2}. \end{cases}$$

Resolvendo-o, obtém-se

$$X(p)=\frac{5p^2+25p-37}{p^2(p^2+12p+37)}, \quad Y(p)=\frac{-47p-259}{p^2(p^2+12p+37)}.$$

Vamos agora decompor as fracções do segundo membro em fracções elementares

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{p+6}{p^2+12p+37},$$

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{7}{p^2}-\frac{p+5}{p^2+12p+37},$$

ou

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{p+6}{(p+6)^2+1},$$

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{7}{p^2}-\frac{p+6}{(p+6)^2+1}+\frac{1}{(p+6)^2+1}.$$

Regressando à funções originais, obtém-se a solução procurada:

$$x(t)=1-t-e^{-6t}\cos t,\quad y(t)=1-7t+e^{-6t}\cos t+e^{-6t}\sin t,$$

Utilizando a transformação de Laplace, resolver os seguintes problemas de Cauchy para os sistemas lineares dados:

864. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+y=0,\\ \dfrac{dy}{dt}+x=0,\end{cases}\quad x(0)=2,\quad y(0)=0.$

865. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+x-2y=0,\\ \dfrac{dy}{dt}+x+4y=0,\end{cases}\quad x(0)=y(0)=1.$

866. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2(x+y),\end{cases}\quad x(0)=y(0)=1.$

867. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+2y=3t,\\ \dfrac{dy}{dt}-2x=4,\end{cases}\quad x(0)=2,\quad y(0)=3.$

868. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+x=y+e^t,\\ \dfrac{dy}{dt}+y=x+e^t,\end{cases}\quad x(0)=y(0)=1.$

869. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=-\sin t,\\ \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=\cos t,\end{cases}\quad x(0)=\frac{1}{2},\quad y(0)=-\frac{1}{2}.$

870. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-z,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y,\\ \dfrac{dz}{dt}=x+z,\end{cases}\quad x(0)=1,\quad y(0)=2,\quad z(0)=3.$

871. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4y+z,\\ \dfrac{dy}{dt}=z,\\ \dfrac{dz}{dt}=4y,\end{cases}\quad x(0)=5,\quad y(0)=0,\quad z(0)=4.$

872. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+2\dfrac{dy}{dt}+x+y+z=0,\\ \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+x+z=0,\\ \dfrac{dz}{dt}-2\dfrac{dy}{dt}-y=0,\end{cases}\quad x(0)=y(0)=1,\quad z(0)=-2.$

873. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}-2x+2y=1-2t,\\ \dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+x=0,\end{cases}\quad x(0)=y(0)=x'(0)=0.$

874. $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=y,\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=x,\end{cases}\quad x(0)=y(0)=1,\quad x'(0)=2,\quad y'(0)=0.$

875. $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=x-4y, & x(0)=2,\quad y(0)=0,\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-x+y, & x'(0)=-\sqrt{3},\quad y'(0)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

876. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}=e^t-x, \\ \dfrac{d^2y}{dt}+\dfrac{dx}{dt}=1, \end{cases}$ $x(0)=1,\ \ y(0)=0,\ \ x'(0)=2,\ \ y'(0)=-1.$

877. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+x+y=5, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}-4x-3y=-3, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=x'(0)=y'(0)=0.$

878. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+4y+2x=4t+1, \\ \dfrac{dy}{dt}+x-y=\frac{3}{2}t^2, \end{cases}$ $x(0)=y(0)=0.$

879. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+y-2x=0, \\ \dfrac{dy}{dt}+x-2y=-5e^t\sin t, \end{cases}$ $x(0)=2,\ \ y(0)=3.$

Capítulo 4

Teoria da Estabilidade

25. ESTABILIDADE SEGUNDO LIAPUNOV. CONCEITOS E DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS

Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,x_2,\dots,x_n,t),\quad i=1,2,\dots,n. \tag{1}$$

A solução $\varphi_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$, do sistema (1) que satisfaz as condições iniciais $\varphi_i(t_0)=\varphi_{i0}$, $i=1,2,\dots,n$, diz-se estável segundo Liapunov quando $t\to\infty$, se, para qualquer $\varepsilon>0$, existir $\delta(\varepsilon)>0$, tal que para qualquer solução $x_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$, do sistema (1), cujos valores iniciais satisfaçam as condições

$$\left|x_i(t_0)-\varphi_{i0}\right|<\delta,\quad i=1,2,\dots,n, \tag{2}$$

forem verdadeiras as desigualdades

$$\left|x_i(t_0)-\varphi_i(t)\right|<\varepsilon,\quad i=1,2,\dots,n, \tag{3}$$

para qualquer $t\ge t_0$.

Se existir, pelo menos, uma solução $x_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$, para a qual as desigualdades (3) não se verificam, por mais pequeno que seja $\delta>0$, então a solução $\varphi_i(t)$ diz-se instável.

Se, além das desigualdades (3), as condições (2) implicarem também

$$\lim_{t\to\infty}\left|x_i(t_0)-\varphi_i(t)\right|=0,\quad i=1,2,\dots,n, \tag{4}$$

então a solução $\varphi_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$, diz-se assimptoticamente estável.

Estudar a solução $\varphi_i(t)$ do sistema (1) quanto à estabilidade é equivalente a estudar, quanto à estabilidade, a solução nula $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2,\ldots, n$, de um certo sistema, análogo ao sistema (1),

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2,\ldots, x_n, t), \quad i = 1, 2,\ldots, n. \tag{1'}$$

onde $F_i(0, 0,\ldots, 0, t) \equiv 0$, $i = 1, 2,\ldots, n$. O ponto $x_i = 0$, $i = 1, 2,\ldots, n$ diz-se um ponto de equilíbrio do sistema (1').

Em relação a um ponto de equilíbrio, as definições de estabilidade e instabilidade podem ser formuladas do seguinte modo. O ponto de equilíbrio $x_i = 0$, $i = 1, 2,\ldots, n$, é estável segundo Liapunov se, para qualquer δ, existir $\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer solução $x_i(t)$, $i = 1, 2,\ldots, n$, cujos valores iniciais $x_i(t_0) = x_{i0}$ satisfaçam as condições

$$|x_{i0}| < \delta, \quad i = 1, 2,\ldots, n, \tag{2'}$$

seja verdadeira a desigualdade

$$|x_{i0}| < \varepsilon, \quad i = 1, 2,\ldots, n. \tag{3'}$$

para qualquer $t \geq t_0$.

No caso de $n = 2$ o significado geométrico da estabilidade é o seguinte. Por mais pequeno que seja o cilindro de raio ε com eixo $0t$, no plano $t = t_0$ existe uma vizinhança do ponto $(0, 0, t_0)$ tal que todas as curvas integrais

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t)$$

que saem de dentro desta vizinhança, para qualquer $t \geq t_0$ mantêm-se dentro do dito cilindro (Fig. 30).

Se, além de se verificar nas desigualdades (3'), também for satisfeita a condição $\lim_{t\to+\infty} |x_i(t)| = 0$, $i = 1, 2,\ldots, n$, então diz-se que a estabilidade é assimptótica.

O ponto de equilíbrio $x_i = 0$, $i = 1, 2,\ldots, n$, diz-se instável se existir, pelo menos, uma solução $x_i(t)$, $i = 1, 2,\ldots, n$, para a qual as desigualdades (3') não se verificam, por mais pequeno que seja $\delta > 0$.

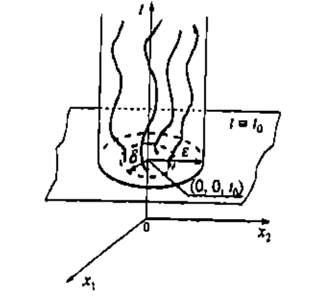


Fig. 30

EXEMPLO 1. Baseando-se na definição de estabilidade segundo Liapunov, estude quanto à estabilidade a solução da equação

$$\frac{dx}{dt} = 1 + t - x, \tag{5}$$

que satisfaz a condição inicial

$$x(0) = 0.$$

Resolução. A equação (5) é uma equação linear não homogénea. A sua solução geral é $x(t) = C\,e^{-t} + t$. A condição inicial $x(0) = 0$ é satisfeita pela solução

$$\varphi(t) = t \tag{6}$$

da equação (5). A condição inicial $x(0) = x_0$ é satisfeita pela solução

$$x(t) = x_0\,e^{-t} + t. \tag{7}$$

A diferença entre as soluções (6) e (7) da equação (5) pode ser escrita sob a forma

$$x(t) - \varphi(t) = x_0\,e^{-t} + t - t = (x_0 - 0)\,e^{-t}.$$

Daqui resulta que, para qualquer ε, existe $\delta > 0$ (por exemplo, $\delta = \varepsilon$) tal que, para qualquer solução $x(t)$ da equação (5), cujos valores iniciais satisfaçam a condição $|x_0 - 0| < \delta$, é satisfeita a desigualdade

$$|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - 0|\,e^{-t} < \varepsilon$$

para qualquer $t \geq 0$. Por conseguinte, a solução $\varphi(t) = t$ é estável. Além disso, uma vez que

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t\to+\infty} |x_0 - 0|\,e^{-t} = 0$$

a solução $\varphi(t) = t$ é assimptoticamente estável. Entretanto, esta solução é ilimitada quanto $t \to \infty$.

O exemplo que acabámos de apresentar mostra que a estabilidade da solução de uma equação diferencial não implica que ela seja limitada.

EXEMPLO 2. Consideremos a seguinte equação diferencial (ver [6]):

$$\frac{dx}{dt} = \sin^2 x. \tag{8}$$

Esta equação admite, evidentemente, as soluções

$$x = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots, \tag{9}$$

Integremos a equação (8):

$$\operatorname{ctg} x = C - t, \quad \text{ou} \quad \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 - t,$$

donde

$$x = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x_0 - t), \quad x \neq k\pi, \tag{10}$$

Todas as soluções (9) e (10) são limitadas em $(-\infty, +\infty)$. No entanto, a solução $x(t) \equiv 0$ é instável quando $t \to +\infty$, uma vez que, para qualquer $x_0 \in (0, \pi)$ se verifica $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \pi$. Deste modo, vemos que o facto de todas as soluções duma equação diferencial serem limitadas não implica que elas sejam estáveis (Fig. 31).

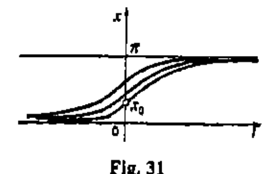


Fig. 31

Este fenómeno é característico das equações e sistemas não lineares.

EXEMPLO 3. Com base na definição de estabilidade segundo Liapunov, mostre que a solução do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases} \tag{11}$$

que satisfaz as condições $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ é estável.

Resolução. A solução do sistema (11) que satisfaz as condições dadas é $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$. Qualquer solução deste sistema que satisfaça as condições $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ tem a forma

$$x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t.$$

Consideremos um valor arbitrário $\varepsilon > 0$ e mostremos que existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, se $|x_0 - 0| < \delta$, $|y_0 - 0| < \delta$ então verificam-se as desigualdades

$$|x(t) - 0| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon,$$

$$|y(t) - 0| = |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon,$$

para qualquer $t \geq 0$.

De acordo com a definição dada, isto significa que a solução nula $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ é estável segundo Liapunov. Evidentemente, verifica-se

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| \leq |x_0 \cos t| + |y_0 \sin t| \leq |x_0| + |y_0|,$$
$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| \leq |x_0 \cos t| + |y_0 \sin t| \leq |x_0| + |y_0|, \tag{12}$$

para qualquer t. Logo, se $|x_0| + |y_0| < \varepsilon$, então também se verifica

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| \leq \varepsilon, \quad |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon \tag{13}$$

para qualquer t. Por conseguinte, se considerarmos, por exemplo, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$, e se tivermos $|x_0| < \delta$, $|y_0| < \delta$, então, atendendo a (12), as desigualdades (13) verificam-se para qualquer $t \geq 0$, isto é, a solução nula do sistema (11) é de facto estável segundo Liapunov, mas não é assimptoticamente estável.

TEOREMA. As soluções de um sistema de equações diferenciais lineares

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ou são todas estáveis ou todas instáveis.

Esta afirmação não é verdadeira para sistemas não lineares, que podem ter simultaneamente soluções estáveis e soluções instáveis.

EXEMPLO 4. Consideremos a equação não linear

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2(t). \tag{14}$$

Esta equação admite, evidentemente, as soluções $\varphi(t) = 1$ e $\varphi(t) = -1$.

A solução $\varphi(t) = -1$ desta equação é instável, enquanto a solução $\varphi(t) = 1$ é assimptoticamente estável. Na realidade, quando $t \to +\infty$, todas as soluções da equação (14)

$$x(t) = \frac{(1 + x_0)\, e^{2(t - t_0)} - (1 - x_0)}{(1 + x_0)\, e^{2(t - t_0)} + (1 - x_0)} \quad (x_0 \neq -1)$$

tendem para +1. Isto significa, de acordo com a definição, que a solução $\varphi(t) = 1$ da equação é assimptoticamente estável.

Com base na definição de estabilidade segundo Liapunov, investigue quanto à estabilidade as soluções das seguintes equações e sistemas:

880. $\dfrac{dx}{dt} = x + t, \quad x(0) = 1.$ **881.** $\dfrac{dx}{dt} = 2t(x+1), \quad x(0) = 0.$ **882.** $\dfrac{dx}{dt} = -x + t^2, \quad x(1) = 1.$

883. $\dfrac{dx}{dt} = 2 + t, \quad x(0) = 1.$ **884.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 13y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \frac{1}{4}x - 2y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$

885. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 9y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$

26. OS CASOS MAIS SIMPLES DE PONTOS DE EQUILÍBRIO

Consideremos um sistema de duas equações lineares homogéneas com coeficientes constantes:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \qquad (1)$$

onde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

O ponto $x = 0$, $y = 0$, no qual se anula o segundo membro do sistema (1), designa-se ponto de equilíbrio do sistema (1).

Para estudar os pontos de equilíbrio do sistema (1), temos de escrever a equação característica

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

e determinar as suas raízes λ_1 e λ_2.

Distinguem-se os seguintes casos:

1. As raízes λ_1 e λ_2 da equação característica (2) são reais e distintas:

a) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. O ponto de equilíbrio é assimptoticamente estável (nó estável, Fig. 32).

b) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. O ponto de equilíbrio é instável (nó instável, Fig. 33).

c) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. O ponto de equilíbrio é instável (ponto de sela, Fig. 34).

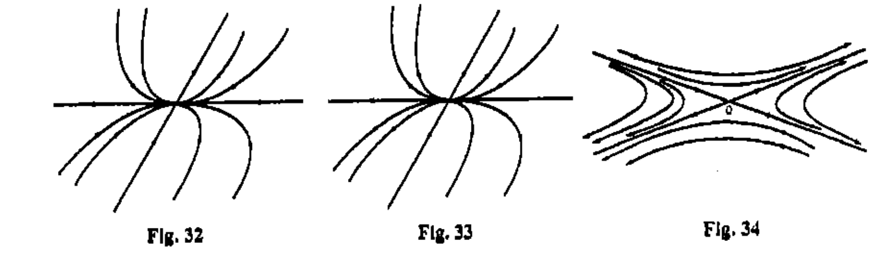


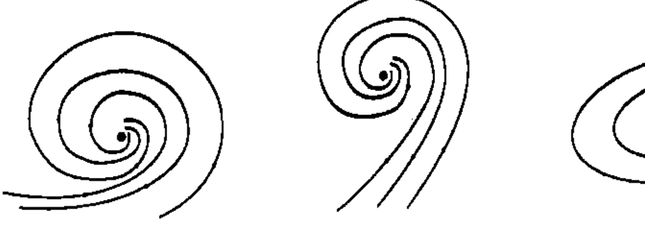
Fig. 32 Fig. 33 Fig. 34

2. As raízes da equação característica (2) são complexas: $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$;

a) $p < 0$, $q \neq 0$. O ponto de equilíbrio é assimptoticamente estável (foco estável, Fig. 35).

b) $p > 0$, $q \neq 0$. O ponto de equilíbrio é instável (foco instável, Fig. 36).

c) $p = 0$, $q \neq 0$. O ponto de equilíbrio é estável (centro, Fig. 37).



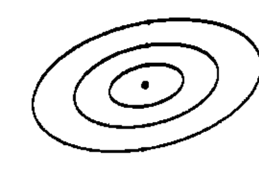


Fig. 35 Fig. 36 Fig. 37

3. A raiz $\lambda_1 = \lambda_2$ é múltipla.

a) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. O ponto de equilíbrio é assimptoticamente estável (nó estável, Figs. 38 e 39).

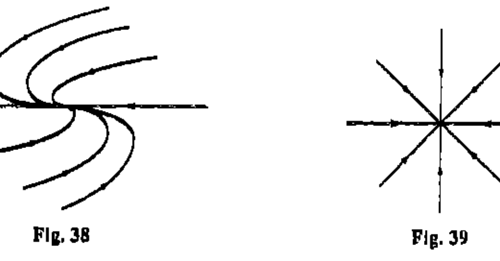


Fig. 38

Fig. 39

b) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. O ponto de equilíbrio é instável (nó instável, Figs. 40 e 41).

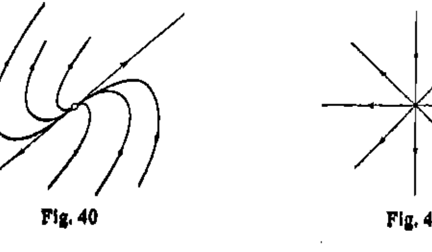


Fig. 40

Fig. 41

EXEMPLO 1. Caracterize o ponto de equilíbrio (0, 0) do seguinte sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Resolução. Escrevemos a equação característica:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0.$$

As suas raízes $\lambda_1 = 3+\sqrt{2} > 0$, $\lambda_2 = 2-\sqrt{2} > 0$ são reais, distintas e positivas. Por conseguinte, o ponto de equilíbrio (0, 0) é um nó instável.

A relação entre os diferentes tipos de pontos de equilíbrio e os valores das raízes características pode ser representada graficamente. Para isso, introduzam-se as notações $\sigma = -(a_{11} + a_{22})$, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Então a equação característica escreve-se sob a forma $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$.

Introduzam-se no plano as coordenadas cartesianas Δ e σ e destaquemos nele os domínios que correspondem a diferentes tipos de pontos de equilíbrio (Fig. 42). Da classificação acima apresentada

resulta que as condições de estabilidade de um ponto de equilíbrio são Re $\lambda_1 < 0$, Re $\lambda_2 < 0$. Estas condições verificam-se se tivermos $\Delta > 0$ e $\sigma > 0$, isto é para os pontos do primeiro quadrante.

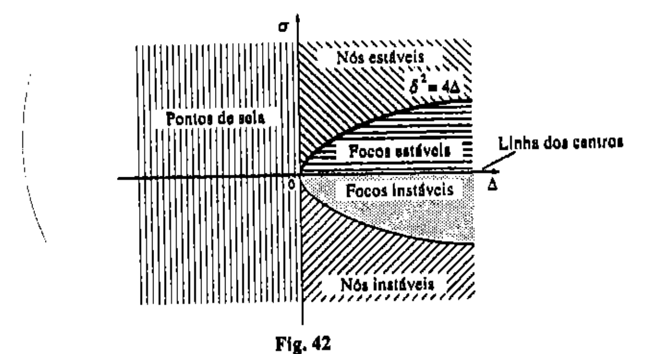


Fig. 42

Se λ_1 e λ_2 forem complexos, então o ponto de equilíbrio é do tipo foco. Esta condição é satisfeita pelos pontos que se situam entre os ramos da parábola $\sigma^2 = 4$ e não pertencem ao eixo OΔ ($\sigma^2 < 4$, $\sigma \neq 0$). Os pontos do semieixo $\sigma = 0$, para os quais $\Delta > 0$, correspondem a pontos de equilíbrio do tipo centro.

Os pontos situados fora da parábola $\sigma^2 = 4$ (para os quais $\sigma^2 > 4$) correspondem a pontos de sela.

O domínio do plano O$\Delta\sigma$ no qual $\Delta < 0$ contém pontos de equilíbrio do tipo sela.

Excluindo o caso excepcional em que se passa pela origem das coordenadas, um ponto de sela só pode passar a um nó estável ou instável; um nó estável, por sua vez, só pode passar a uma sela ou a um foco estável. O caso da raiz múltipla $\lambda_1 = \lambda_2$ corresponde à fronteira entre os nós e os focos, isto é, à parábola $\sigma^2 = 4\Delta$.

EXEMPLO 2. **Investigar o ponto de equilíbrio da equação das oscilações elásticas**

$$\frac{d^2x}{dt} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \beta^2 x = 0 \tag{3}$$

em função do parâmetro α, que, com $\alpha > 0$, representa o atrito e a resistência do meio.

Resolução. **A equação (3) é equivalente ao seguinte sistema de equações:**

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2\alpha y - \beta^2 x. \end{cases} \tag{4}$$

A fim de caracterizar o ponto de equilíbrio (0, 0) do sistema (4), escrevemos a sua equação característica:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\beta^2 & -2\alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ ou } \lambda^2+2\alpha\lambda+\beta^2=0;$$

logo

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-\beta^2}. \qquad (5)$$

Distinguem-se os seguintes casos:

a) $\alpha = 0$ (não existe resistência do meio). De (5) resulta $\lambda_{1,2} = \pm iB$. O ponto de equilíbrio é estável, trata-se de um centro (todos os movimentos são periódicos);

b) $\alpha > 0$, $\alpha^2-\beta^2<0$. As raízes λ_1 e λ_2, neste caso, são complexas conjugadas, com Re $\lambda < 0$. Logo, o ponto de equilíbrio é um foco estável (as oscilações são amortecidas);

c) $\alpha < 0$ ("atrito negativo"), $\alpha^2-\beta^2<0$. As raízes λ_1 e λ_2, neste caso, são complexas conjugadas, com Re $\lambda > 0$. Logo, o ponto de equilíbrio é um foco instável;

d) $\alpha > 0$, $\alpha^2-\beta^2 \geq 0$ (a resistência do meio é grande, $\alpha \geq \beta$). As raízes λ_1 e λ_2, neste caso, são reais negativas. O ponto de equilíbrio é um nó estável (todas as soluções são movimentos amortecidos e não oscilatórios);

e) $\alpha < 0$, $\alpha^2-\beta^2 \geq 0$ (grande "atrito negativo"). As raízes λ_1 e λ_2, neste caso, são reais positivas. O ponto de equilíbrio é um nó instável.

Caracterize o ponto de equilíbrio (0, 0) dos seguintes sistemas de equações diferenciais:

886. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x+y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x+y. \end{cases}$

887. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x+2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x+y. \end{cases}$

888. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x+3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x+y. \end{cases}$

889. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x-y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x-y. \end{cases}$

890. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x+\frac{1}{7}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x-3y. \end{cases}$

891. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x-y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x+y. \end{cases}$

892. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y. \end{cases}$

893. Para que valores de α o ponto de equilíbrio (0, 0) do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x+\alpha y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x+y \end{cases}$$

é estável?

Consideremos um sistema de equações diferenciais lineares homogéneas com coeficientes constantes:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i=1,2,\ldots,n \ (n \geq 2). \qquad (6)$$

Neste caso, a disposição das curvas integrais em torno da origem das coordenadas pode ser caracterizada de modo análogo (pontos de sela generalizados, nós generalizados, etc.).

TEOREMA. Se todas as raízes da equação característica do sistema (6) tiverem partes reais negativas, então o ponto de equilíbrio do sistema é assimptoticamente estável. Se, pelo menos, uma raiz tiver parte real positiva, então o ponto de equilíbrio do sistema é instável.

EXEMPLO 3. Será estável o ponto de equilíbrio do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x+z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y-z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y-z. \end{cases}$$

RESOLUÇÃO. Escrevemos a equação característica do sistema

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou $(1+\lambda)(\lambda^2+3\lambda+3)=0$. As raízes desta equação são $\lambda_1=-1$ e $\lambda_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e têm a parte real negativa. Logo, o ponto de equilíbrio deste sistema é assimptoticamente estável.

Investigar, quanto à estabilidade, o ponto de equilíbrio O (0, 0, 0) dos seguintes sistemas:

894. a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + 5z, \\ \frac{dy}{dt} = -2y + z, \\ \frac{dz}{dt} = -3z; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dz}{dt} = x + 3y - z. \end{cases}$

27. MÉTODO DAS FUNÇÕES DE LIAPUNOV

O método das funções de Liapunov consiste no estudo directo da estabilidade da posição de equilíbrio do sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

por meio de uma certa função $V(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, escolhida de forma adequada, designada função de Liapunov, sem que seja necessário determinar previamente qualquer solução do sistema.

Limitar-nos-emos a considerar sistemas autónomos:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

para os quais a solução $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, é um ponto de equilíbrio.

A função $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definida numa certa vizinhança da origem das coordenadas, diz-se de sinal definido (definida positiva ou definida negativa) se no domínio

$$|x_i| \le h, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

onde h é um número positivo, suficientemente pequeno, só pode tomar valores de um certo sinal e anula-se apenas quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Assim, no caso $n = 3$, as funções

$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{e} \quad V = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

são definidas positivas, podendo, neste caso, o número $h > 0$ ser tão grande quanto se quiser.

A função $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diz-se de sinal constante (positivo ou negativo) se, no domínio (2) ela só pode tomar valores de um certo sinal, mas pode anular-se mesmo quando $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \ge 0$. Por exemplo, a função

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2$$

tem sinal constante (positivo). Na realidade, a função $V(x_1, x_2, x_3)$ pode ser escrita sob a forma: $V(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2$, donde resulta que ela se anula mesmo quando $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 \ne 0$, nomeadamente quando $x_3 = 0$ e $x_1 = -x_2$.

Seja $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma função diferenciável dos seus argumentos e sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ certas funções do tempo t que satisfazem o sistema de equações (1). Então a derivada total de V em ordem ao tempo é dada por

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3}$$

A grandeza dV/dt, definida pela fórmula (3), designa-se derivada total da função V em ordem ao tempo, determinada de acordo com o sistema de equações (1).

TEOREMA 1 (teorema de Liapunov sobre a estabilidade). Se, para o sistema de equações diferenciais (1), existir uma função de sinal definido $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (função de Liapunov), cuja derivada total em ordem ao tempo, determinada de acordo com o sistema (1), seja uma função de sinal constante, oposto ao de V, ou a constante zero, então o ponto de equilíbrio do sistema (1), $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, é estável.

TEOREMA 2 (teorema de Liapunov sobre a estabilidade assimptótica). Se, para o sistema de equações diferenciais (1), existir uma função de sinal definido $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cuja derivada total em ordem ao tempo, determinada de acordo com o sistema (1), seja uma função de sinal definido, oposto ao de V, então o ponto de equilíbrio do sistema (1), $x_i = 0$, é assimptoticamente estável.

EXEMPLO 1. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \tag{4}$$

Como função $V(x, y)$, escolha-se a função $V = x^2 + y^2$. Esta função é definida positiva. A sua derivada total em ordem ao tempo, de acordo com o sistema (4), é

$$\frac{dV}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2xy - 2xy \equiv 0.$$

Do teorema 1 resulta que o ponto estacionário 0(0, 0) do sistema (4) é estável. No entanto, a estabilidade não é assimptótica: as trajectórias do sistema (4) são circunferências e não tendem para 0(0, 0) quando $t \to +\infty$.

EXEMPLO 2. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y^3. \end{cases} \qquad (5)$$

Considerando, de novo, $V(x, y) = x^2 + y^2$, obtém-se

$$\frac{dV}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - 3y^3) = -2(x^4 + 3y^4).$$

Deste modo, dV/dt é uma função definida negativa. De acordo com o teorema 2, o ponto de equilíbrio O (0, 0) do sistema (5) é assimptoticamente estável.

Não existe nenhum método geral para a construção das funções de Liapunov. Nos casos mais simples, a função de Liapunov pode ser procurada sob uma das formas

$$V(x, y) = ax^2 + by^2, \quad V(x, y) = ax^4 + by^4,$$
$$V(x, y) = ax^4 + by^2, \quad (a > 0, b > 0), \quad \text{etc.}$$

EXEMPLO 3. Por meio da função de Liapunov, investigar a estabilidade da solução trivial $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y + x^2 y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - \dfrac{y}{2} - \dfrac{x^3 y}{2}. \end{cases}$$

Resolução. Procuraremos a função de Liapunov sob a forma $V = ax^2 + by^2$, onde $a > 0$, $b > 0$ são parâmetros arbitrários. Temos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dy}{dt} = 2ax(-x - 2y + x^2y^2) + 2by\left(x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}x^3 y\right) =$$
$$= -(2ax^2 + by^2) + (2xy - x^3y^2)(b - 2a).$$

Considerando $b = 2a$, obtém-se $dV/dt = -2a(x^2 + y^2) \le 0$. Deste modo, para qualquer $a > 0$ e $b = 2a$, a função $V = ax^2 + 2ay^2$ é definida positiva, enquanto a sua derivada total, determinada de acordo com o sistema dado, é definida negativa. De acordo com o teorema 2 de Liapunov, a solução trivial $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ do sistema dado é assimptoticamente estável.

Se não fosse possível encontrar uma função $V(x, y)$ com a forma acima indicada, teríamos de a procurar sob a forma $V = ax^4 + by^4$ ou $V = ax^4 + by^2$, etc.

TEOREMA 3 (teorema de Liapunov sobre a instabilidade). Suponhamos que para o sistema de equações diferenciais (1) existe uma função $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, diferenciável em torno da origem das coordenadas, e tal que $V(0, 0, \dots, 0) = 0$. Se a sua derivada total dV/dt, determinada de acordo com o sistema (1), for uma função definida positiva e se existirem pontos, tão próximos quanto se quiser da origem das coordenadas, nos quais a função $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ toma valores positivos, então o ponto de equilíbrio $x_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ é instável.

TEOREMA 4 (teorema de Tchetaiev sobre a instabilidade). Suponhamos que para o sistema de equações diferenciais (1) existe uma função $\upsilon(x_1, x_2, \dots, x_n)$, continuamente diferenciável em torno do ponto estacionário $x_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, que satisfaz, numa vizinhança fechada do ponto de equilíbrio, as seguintes condições:

1) Em qualquer vizinhança, por mais pequena que seja, do ponto de equilíbrio $x_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, existe um domínio Ω_1, no qual $\upsilon(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$, sendo que $\upsilon = 0$ nos pontos fronteiros de Ω_1, que são internos para Ω (Fig. 43);
2) O ponto de equilíbrio $0(0, 0, \dots, 0)$ é um ponto fronteiro do domínio Ω_1;
3) No domínio Ω_1, a derivada $d\upsilon/dt$, determinada de acordo com o sistema (1), é definida positiva.

Então o ponto de equilíbrio $x_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, do sistema (1) é instável.

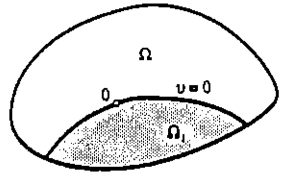


Fig. 43

EXEMPLO 4. Estudar quanto à estabilidade o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

Resolução. Consideremos a função $\upsilon(x, y) = x^2 - y^2$. Então verifica-se

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x^2 + 2y^2$$

e a derivada total é uma função definida positiva. Uma vez que existem pontos, tão próximos quanto se quiser da origem das coordenadas, nos quais $v > 0$ (por exemplo, $v = x^2 > 0$ ao longo da recta $y = 0$), estão satisfeitas as condições do teorema 3 e o ponto de equilíbrio $O(0, 0)$ (ponto de sela) é instável.

EXEMPLO 5. Investigar, quanto à estabilidade, o ponto de equilíbrio $x = 0$, $y = 0$ do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^3 + x^5, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^3 + y^5. \end{cases} \qquad (6)$$

Resolução. A função $v = x^4 - y^4$ satisfaz as condições do teorema de Tchetaiev sobre a instabilidade:

1) $v > 0$ se $|x| > |y|$;

2) $\dfrac{dv}{dt} = 4(x^8 - y^8)$ é uma função definida positiva no domínio $|x| > |y|$.

Por conseguinte, o ponto de equilíbrio $x = 0$, $y = 0$ é instável.

Estudar, quanto à estabilidade, o ponto de equilíbrio dos seguintes sistemas:

895. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3y - 2x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y^3. \end{cases}$ **896.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -xy^4, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^4 y. \end{cases}$

897. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y + 4x^2 y. \end{cases}$ **898.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{4}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - \dfrac{y}{2} - \frac{1}{4}y^3. \end{cases}$

899. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y^3. \end{cases}$ **900.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x^2 y^2 - \frac{1}{4}x^5, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - x^3 y - \frac{1}{2}y^3. \end{cases}$

901. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$ **902.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y - y^3. \end{cases}$

903. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy^4 - 2x^3 - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x^2 y^3 - y^7 + 2x. \end{cases}$ **904.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

905. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^5 + y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^3 - y^5. \end{cases}$ **906.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy - x^3 + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^4 - x^2 y - x^3. \end{cases}$

907. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^3 + 2xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 y. \end{cases}$ **908.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2y - x(x-y)^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - \frac{3}{2}y(x-y)^2. \end{cases}$

909. Seja $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma função definida positiva, duas vezes continuamente diferenciável e tal que

$$v(0) = \frac{\partial v(0)}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial v(0)}{\partial x_n} = 0.$$

Investigar, quanto à estabilidade a solução trivial $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_n}. \end{cases}$$

28. ESTABILIDADE SEGUNDO A PRIMEIRA APROXIMAÇÃO

Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

e seja $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, um ponto de equilíbrio do sistema (1), ou seja, $f_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Vamos supor que as funções $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ são diferenciáveis um número suficiente de vezes na origem das coordenadas.

Vamos desenvolver as funções f_i em série de Taylor numa vizinhança da origem das coordenadas:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

onde $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i(0, 0, \ldots, 0)}{\partial x_j}$ e R_i representa os termos de segunda ordem em relação a $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Então o sistema inicial (1) pode ser escrito sob a forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Em vez do sistema (2) consideremos o sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (a_{ij} = \text{const.}), \tag{3}$$

que é designado sistema de equações de primeira aproximação do sistema (1).

São verdadeiras as seguintes proposições:

1. Se todas as raízes da equação característica

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

tiverem partes reais negativas, então a solução nula do sistema (2), tal como a do sistema (3), é assimptoticamente estável.

2. Se uma, pelo menos, das raízes da equação característica (4) tiver a parte real positiva, então a solução nula do sistema (2), tal como a do sistema (3), é instável.

Costuma-se dizer que nos casos 1 e 2 é possível investigar a estabilidade da solução nula do sistema (2) segundo a primeira aproximação.

Nos casos críticos em que as partes reais de todas as raízes da equação característica (4) são não positivas, mas tendo uma delas, pelo menos, a parte real nula, não é possível, de um modo geral, analisar a estabilidade da solução nula do sistema (3) segundo a primeira aproximação (nestes casos, a influência dos termos não lineares representados por R_i torna-se determinante).

EXEMPLO 1. Investigar, segundo a primeira aproximação, a estabilidade do ponto de equilíbrio $x = 0, y = 0$ do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 5y^2, \\ \dot{y} = 3x + y + \dfrac{x^3}{2} \end{cases} \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ \dot{y} = \frac{dy}{dt}\right). \tag{5}$$

Resolução. O sistema da primeira aproximação tem a forma

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + y; \end{cases} \tag{6}$$

os termos não lineares satisfazem as condições impostas: a sua ordem é igual ou superior a 2. A equação característica do sistema (6) é:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0. \tag{7}$$

As raízes da equação característica (7) são reais: $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$. Visto que $\lambda_1 > 0$, a solução $x = 0, y = 0$ do sistema (5) é instável.

EXEMPLO 2. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y^3. \end{cases} \tag{8}$$

O ponto de equilíbrio $x \equiv 0, y \equiv 0$ do sistema (8) é assimptoticamente estável, visto que, para este sistema, a função $v = x^2 + y^2$ satisfaz todas as condições do teorema de Liapunov sobre a estabilidade assimptótica. Em particular,

$$\frac{dv}{dt} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \le 0.$$

Entretanto, o ponto de equilíbrio $x \equiv 0, y \equiv 0$ do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y^3 \end{cases} \tag{9}$$

é instável, de acordo com o teorema de Tchetaiev. De facto, se considerarmos $v = x^2 + y^2$, teremos $dv/dt = 2(x^4 + y^4) \ge 0$.

Entretanto, os sistemas (8) e (9) têm o mesmo sistema de primeira aproximação:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \tag{10}$$

A equação característica do sistema (10) é

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda^2 + 1 = 0$$

e as suas raízes são imaginárias puras, ou seja, as suas partes reais são nulas. No caso do sistema (10), o ponto de equilíbrio é um centro. Os sistemas (8) e (9) obtêm-se mediante pequenas perturbações do segundo membro de (10) numa vizinhança da origem das coordenadas. No entanto, estas pequenas perturbações fazem que as trajectórias fechadas se transformem em espirais, que, no caso do sistema (8), se aproximam da origem das coordenadas, pelo que o ponto de equilíbrio é um foco estável; no caso do sistema (9), as espirais afastam-se da origem das coordenadas, pelo que temos um foco instável. Este exemplo mostra que nos casos críticos os termos não lineares podem influir na estabilidade do ponto de equilíbrio.

EXEMPLO 3. Consideremos um circuito fechado com elementos não lineares (Fig. 44). A equação do circuito é:

$$L\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{dt} + \frac{1}{C}x + g\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0. \tag{11}$$

Fig. 44

Nesta equação, x é a carga do condensador; dx/dt é a corrente; R é a resistência; L é a indutância; C, a capacidade; $g(x, dx/dt)$ são os termos não lineares, de grau não inferior ao segundo, e tais que $g(0, 0) = 0$. A equação (11) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{LC}x - \dfrac{R}{L}y - \dfrac{1}{L}g(x, y), \end{cases} \tag{12}$$

para o qual a origem das coordenadas é um ponto de equilíbrio.

Consideremos o sistema de primeira aproximação:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{LC}x - \dfrac{R}{L}y. \end{cases} \tag{13}$$

A equação característica do sistema (13) tem a forma

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\dfrac{1}{LC} & -\dfrac{R}{L} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 + \frac{R\lambda}{L} + \frac{1}{LC} = 0. \tag{14}$$

Se for satisfeita a condição $R^2/L^2 < 4/LC$, isto é, $R^2 < 4L/C$, então a equação (14) tem raízes complexas com a parte real negativa, igual a $p = -R/4L$, pelo que a origem das coordenadas, para os sistemas (13) e (12), é assimptoticamente estável.

No caso de $R^2 > 4L/C$, a origem das coordenadas também é assimptoticamente estável, visto que R, L e C são positivos.

A estabilidade assimptótica do ponto de equilíbrio do sistema considerado é evidente do ponto de vista físico: quando a resistência de Ohm é positiva, a corrente desaparece inevitavelmente com o decorrer do tempo.

Investigue, segundo a primeira aproximação, a estabilidade do ponto de equilíbrio $O(0, 0)$ dos seguintes sistemas:

910. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - \sin y^2, \\ \dot{y} = -x - 3y + x\left(e^{x^2/2} - 1\right). \end{cases}$

911. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + x^2 \sin y, \\ \dot{y} = -x - 4y + 1 - \cos y^2. \end{cases}$

912. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 8\sin^2 y, \\ \dot{y} = x - 3y + 4x^3. \end{cases}$

913. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 22\sin y + x^2 - y^3, \\ \dot{y} = \sin x - 5y + e^{x^2} - 1. \end{cases}$

914. $\begin{cases} \dot{x} = -10x + 4e^y - 4\cos y^2, \\ \dot{y} = 2e^x - 2 - y + x^4. \end{cases}$

915. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2\sin y - y^4, \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1 + \frac{5}{2}x^2. \end{cases}$

916. $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2y - x^3 y, \\ \dot{y} = -y - 2x + x^4 - y^7. \end{cases}$

917. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{5}{2}xe^x - 3y + \sin x^2, \\ \dot{y} = 2x + ye^{-y^2/2} - y^4 \cos x. \end{cases}$

918. $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{3}{4}\sin x - 7y(1-y)^{1/3} + x^3, \\ \dot{y} = \frac{2}{3}x - 3y\cos y - 11y^5. \end{cases}$

919. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{4}(e^x - 1) - 9y + x^4, \\ \dot{y} = \frac{1}{5}x - \sin y + y^{14}. \end{cases}$

920. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + y\cos y - \dfrac{x^3}{3}, \\ \dot{y} = 3x + 2y + \dfrac{x^4}{12} - y^3 e^y. \end{cases}$ **921.** $\begin{cases} \dot{x} = 4y - x^3, \\ \dot{y} = -3x - y^3. \end{cases}$ **922.** $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = 2x - y^3. \end{cases}$

29. ESTABILIDADE DAS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM RELAÇÃO A ALTERAÇÕES DO SEGUNDO MEMBRO

Consideremos as seguintes equações diferenciais:

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

$$y' = f(x, y) + \Theta(x, y) \tag{2}$$

onde as funções $f(x, y)$ e $\Theta(x, y)$ são contínuas num domínio fechado $\overline{G}$ do plano $x0y$, sendo a derivada parcial $\partial f/\partial y$ da função $f(x, y)$ contínua nesse domínio.

Suponhamos que no domínio $\overline{G}$ se verifica a desigualdade $|\Theta(x, y)| \le \varepsilon$. Se $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$ forem, respectivamente, soluções das equações (1) e (2), que satisfaçam a mesma condição inicial $\varphi\big|_{x=x_0} = \psi\big|_{x=x_0} = y_0$, então

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le \frac{\varepsilon}{M}\left(e^{M|x-x_0|} - 1\right), \tag{3}$$

onde

$$M = \max_{(x,y)\in\overline{G}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

Da estimativa (3) resulta que, se a perturbação $\Theta(x, y)$ for suficientemente pequena no domínio $\overline{G}$, então a diferença entre as soluções das equações (1) e (2) será pequena, em valor absoluto, dentro de um certo intervalo finito de valores de x.

Este facto permite resolver aproximadamente equações diferenciais complicadas, substituindo-as por outras equações, de resolução mais simples, escolhidas adequadamente. Este método é frequentemente utilizado na resolução das equações diferenciais que surgem em problemas da física e da técnica.

EXEMPLO. No quadrado $Q\{-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}\}$ obter uma solução aproximada da equação

$$y' = \sin(xy) \tag{4}$$

que satisfaça a condição inicial

$$y\big|_{x=0} = 0{,}1. \tag{5}$$

e calcular uma estimativa do erro.

Resolução. Vamos substituir a equação (4) pela equação

$$y' = xy \tag{6}$$

$$y\big|_{x=0} = 0{,}1. \tag{7}$$

A equação (6) com a condição inicial (7) tem a solução $y = 0{,}1 \cdot e^{x^2/2}$, a qual não sai do quadrado Q para qualquer $x \in [-1/2, 1/2]$.

De acordo com o teorema sobre a existência e unicidade de solução, a equação (4) com a condição inicial (5) tem uma única solução $y = \psi(x)$, que pode ser aproximada pela solução $y = 0{,}1 \cdot e^{x^2/2}$ do problema (6)-(7).

Calculemos uma estimativa da diferença

$$\Delta = |\varphi(x) - \psi(x)|,\quad -\tfrac{1}{2} \le x \le \tfrac{1}{2},$$

onde $\varphi(x) = 0{,}1 \cdot e^{x^2/2}$ é a solução do problema (6)-(7). Neste caso, $f(x, y) = xy$ e $|\partial f/\partial y| = |x| \le \frac{1}{2}$. Segundo a fórmula de Taylor, $|\sin z - z| \le |z|^3/6$, pelo que, dentro do quadrado Q, se verifica

$$|\sin xy - xy| \le \frac{|xy|^3}{6} < \frac{1}{4^3 \cdot 6} = \frac{1}{384}.$$

Apliquemos a estimativa (3), considerando $\varepsilon = 1/384$, $M = \max\limits_{(x,y)\in Q} \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{1}{2}$. Então obtém-se

$$\Delta = |\varphi(x) - \psi(x)| \le \frac{1}{192}\left(e^{\frac{1}{2}|x|} - 1\right) < \frac{1}{650},\quad x \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right].$$

É fácil verificar que a solução $\psi(x)$ do problema (4)-(5) não sai do quadrado Q.

Determine o afastamento máximo entre as soluções dos pares de equações seguintes dentro dos intervalos dados, sabendo que elas satisfazem a mesma condição inicial $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

923. $y' = \dfrac{y}{1+x} + x^2$,

$y' = \dfrac{y}{1+x} + x^2 + 0{,}01\sin x$ em $[0, 1]$.

924. $y' = e^{-\frac{\sin y}{1+x^2}}$,

$y' = e^{-\frac{\sin y}{1+x^2}} + \dfrac{\cos xy}{10(4+x^4)}$ em $[0, 2]$.

925. $y' = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} xy$,

$y' = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} xy + 0{,}001\, e^{x^2}$ em $[0, 1]$.

30. CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ

Consideremos uma equação diferencial linear com coeficientes reais constantes:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n = \text{const.}, a_0 > 0). \tag{1}$$

A solução nula $y \equiv 0$ da equação (1) é assimptoticamente estável se todas as raízes da equação característica

$$f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{2}$$

tiverem a parte real negativa.

Critério de Routh-Hurwitz. Para que todas as raízes da equação (2) tenham partes reais negativas, é necessário e suficiente que sejam positivos todos os menores principais da matriz de Hurwitz:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

A matriz de Hurwitz tem a seguinte forma. A sua diagonal principal contém os coeficientes do polinómio (2), começando em a_1 e acabando em a_n. As suas colunas são compostas, alternadamente, pelos coeficientes de índice ímpar e pelos coeficientes de índice par (contando-se, entre estes últimos, o coeficiente a_0). Todos os restantes elementos da matriz, correspondentes a índices menores que 0 ou maiores que n, são nulos. Deste modo, os menores principais da matriz de Hurwitz têm a forma

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

A condição de Hurwitz tem o seguinte enunciado: para a estabilidade assimptótica da solução $y \equiv 0$ da equação (1) é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as desigualdades

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ldots, \quad \Delta_n > 0. \tag{4}$$

Uma vez que $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, a condição $\Delta_n > 0$ pode ser substituída por $a_n > 0$.

EXEMPLO. Investigar a estabilidade da solução nula da equação

$$y^{IV} + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10 = 0. \tag{5}$$

Resolução. A equação característica tem a forma

$$f(\lambda) \equiv \lambda^4 + 5\lambda^3 + 13\lambda^2 + 19\lambda + 10 = 0.$$

Neste caso, $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 13$, $a_3 = 19$, $a_4 = 10$. Calculemos os menores principais da matriz de Hurwitz:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 4240 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} = 424 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 46 > 0, \quad \Delta_1 = 5 > 0.$$

Logo, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$. Por conseguinte, a solução trivial $y \equiv 0$ da equação (5) é assimptoticamente estável.

Os cálculos podem ser organizados, por exemplo, do seguinte modo. Começa-se por escrever o máximo menor principal de Hurwitz Δ_n. Dele facilmente se destacam os outros menores: $\Delta_{n-1}, \ldots, \Delta_1$. Depois, calcula-se sucessivamente Δ_1, Δ_2, etc. Uma vez que seja determinado um menor negativo, pode concluir-se que a solução é instável, sendo desnecessário prosseguir os cálculos.

Investigar a estabilidade da solução nula das seguintes equações:

926. $y''' - 3y' + 2y = 0.$

927. $y^{IV} + 4y''' + 7y'' + 6y' + 2y = 0.$

928. $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0.$

929. $y^{IV} - 2y''' + y'' + 2y' - 2y = 0.$

930. $y^{IV} + 7y''' + 17y'' + 17y' + 6y = 0.$

931. $y''' - 3y'' + 12y' - 10y = 0.$

932. $y^{IV} + 5y''' + 18y'' + 34y' + 20y = 0.$

933. $y^{IV} + 7y''' + 19y'' + 23y' + 10y = 0.$

934. $y^{IV} + 11y''' + 41y'' + 61y' + 30y = 0.$

935. $y^{V} + 3y^{IV} - 5y''' - 15y'' + 4y' + 12y = 0.$

936. $y^{V} + 7y^{IV} + 33y''' + 88y'' + 122y' + 60y = 0.$

Para que valores de α será estável a solução nula das seguintes equações:

937. $y''' + 2y'' + \alpha y' + 3y = 0.$ **938.** $y^{IV} + \alpha y''' + 2y'' + y' + 3y = 0.$

939. $y^{IV} + 2y''' + \alpha y'' + y' + y = 0.$

Para que valores de α e β será estável a solução nula das seguintes equações:

940. $y''' + \alpha y'' + \beta y' + y = 0.$ **941.** $y^{IV} + 3y''' + \alpha y'' + 2y' + \beta y = 0.$

31. CRITÉRIO GEOMÉTRICO DE ESTABILIDADE (CRITÉRIO DE MIKHAILOV)

Consideremos uma equação diferencial linear de ordem n com coeficientes constantes:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y. \tag{1}$$

A sua equação característica tem a forma

$$f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_0 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{2}$$

O critério de Mikhailov permite determinar a disposição das raízes da equação (2) no plano complexo, e, por conseguinte, investigar a estabilidade da solução nula da equação (1). Considerando $\lambda = i\omega$, obtém-se

$$f(i\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \cdots,$$

onde

$$u(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \cdots.$$

A grandeza $f(i\omega)$, para um dado valor de ω, pode ser representada como um vector u, υ no plano complexo, partindo da origem das coordenadas. Quando varia no intervalo $(-\infty, +\infty)$ o outro extremo deste vector descreve uma certa curva, chamada a curva de Mikhailov (Fig. 45). Uma vez que a função $u(\omega)$ é par, a curva de Mikhailov é simétrica em relação ao eixo $0u$ e, por conseguinte, é suficiente construir a parte da curva que corresponde à variação de 0 a $+\infty$.

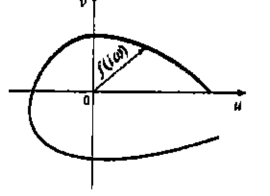


Fig. 45

Se o polinómio $f(\lambda)$, de grau n, tiver m raízes com a parte real positiva e $n - m$ raízes com a parte real negativa, então o ângulo de rotação φ do vector $f(i\omega)$, quando ω varia de 0 a ∞, é igual a $\varphi = (n - 2m)\,\pi/2$.

É evidente que, para a estabilidade da solução nula da equação (1), é necessário e suficiente que $m = 0$.

Critério de Mikhailov. Para a estabilidade da solução $y \equiv 0$ da equação (1), é necessário e suficiente que

(1) Quando ω varia de 0 a ∞, o ângulo de rotação do vector $f(i\omega)$ seja igual a $\varphi = n\pi/2$, isto é, que o vector efectue $n/4$ voltas no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio;

2) O hodógrafo de $f(i\omega)$ não passe pela origem das coordenadas pela origem (0, 0).

Daqui resulta que, para a estabilidade da equação (1), é necessário que todas as raízes das equações $u(\omega) = 0$ e $\upsilon(\omega) = 0$ sejam reais e intercaladas umas com as outras, isto é, entre cada duas raízes de uma equação deve encontrar-se uma raiz da outra.

EXEMPLO. Investigar a estabilidade da solução nula $y \equiv 0$ da equação $y^{IV} + y''' + 4y'' + y' + y = 0$.

Resolução. O polinómio característico tem a forma

$$f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 1. \tag{3}$$

Daqui resulta

$$f(i\omega) = \omega^4 - i\omega^3 - 4\omega^2 + i\omega + 1, \quad u(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 1,$$
$$\upsilon(\omega) = -\omega^3 + \omega = \omega(1 - \omega)(1 + \omega). \tag{4}$$

Construamos uma tabela dos valores das funções $u = u(\omega)$ e $\upsilon = \upsilon(\omega)$, quando $0 \le \omega < +\infty$.

ω	0	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$
u	1	0	−2	0
υ	0	+	0	—

(5)

$$\lim_{\omega \to +\infty} \frac{\upsilon}{u} = 0. \tag{6}$$

A curva de Mikhailov está representada na Fig. 46.

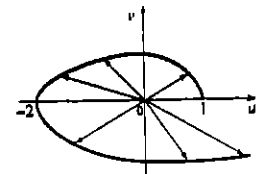


Fig. 46

O ângulo de rotação do raio-vector é igual a $\varphi = \frac{1}{2}\pi = (n - 2m)\,\pi/2$. Uma vez que $n = 4$, conclui-se que $m = 0$, pelo que todas as raízes do polinómio característico se situam no semiplano esquerdo do plano complexo. Por conseguinte, a solução trivial é assimptoticamente estável.

Com base no critério de Mikhailov, investigue a estabilidade da solução nula das seguintes equações:

942. $2y''' + 7y'' + 7y' + 2y = 0.$ **943.** $y''' + 2y'' + 2y' + y = 0.$

944. $2y^{IV} + 13y''' + 28y'' + 23y' + 6y = 0.$ **945.** $3y^{IV} + 13y''' + 19y'' + 11y' + 2y = 0.$

946. $2y^{IV} + 6y''' + 9y'' + 6y' + 2y = 0.$ **947.** $y^{IV} + 4y''' + 16y'' + 24y' + 20y = 0.$

948. $y^{V} + 13y^{IV} + 43y''' + 51y'' + 40y' + 12y = 0.$ **949.** $y''' + y = 0.$

950. $y^{IV} + y''' + y' + y = 0.$ **951.** $y^{V} + 3y^{IV} + 2y''' + y'' + 3y' + 2y = 0.$

952. $y^{V} + y^{IV} + y''' + y'' + y' + y = 0.$ **953.** $2y^{IV} + 11y''' + 21y'' + 16y' + 4y = 0.$

954. $y^{VI} + y^{V} + y^{IV} + y'' + y' + y = 0.$ **955.** $2y^{IV} + 9y''' + 32y'' + 54y' + 20y = 0.$

956. $6y^{IV} + 29y''' + 45y'' + 24y' + 4y = 0.$ **957.** $y^{V} + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 2y' + 2y = 0.$

958. $y^{VI} + y^{V} + 3y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 2y = 0.$ **959.** $y^{V} + 2y^{IV} + y''' + 2y'' + y' + 2y = 0.$

32. EQUAÇÕES COM UM PARÂMETRO PEQUENO ASSOCIADO À DERIVADA

Consideremos a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t), \varepsilon), \tag{1}$$

onde ε é um parâmetro. Se, num certo domínio fechado, a função $F(t, x, \varepsilon)$ for contínua em ordem ao conjunto dos seus argumentos e satisfizer a condição de Lipschitz em relação a x:

$$\left|F(t, x_2, \varepsilon) - F(t, x_1, \varepsilon)\right| \le N\left|x_2 - x_1\right|,$$

onde N não depende de t, x ou ε, então a solução da equação (1) é contínua em ordem a ε.

Em muitos problemas da física encontram-se equações do tipo

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{2}$$

onde ε é um parâmetro pequeno.



Dividindo por ambos os membros da equação (2), reduzimo-la à forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} f(t, x), \tag{3}$$

donde resulta que o segundo membro de (3) é descontínuo quando $\varepsilon = 0$, de tal modo que neste caso não é possível aplicar o teorema sobre a dependência contínua das soluções em relação a ε.

Põe-se a seguinte questão: sob que condições se pode ignorar o termo $\varepsilon\,dx/dt$ da equação (2), quando o valor de $|\varepsilon|$ é pequeno, e considerar como solução aproximada a solução da chamada equação degenerada

$$f(t, x) = 0. \tag{4}$$

Suponhamos que $\varepsilon > 0$ e que a equação degenerada tem uma única solução $x = \varphi(t)$. Consoante o comportamento de $f(t, x)$ perto da solução $x = \varphi(t)$ da equação (4), a solução $x(t, \varepsilon)$ da equação diferencial (2), tanto pode tender para a solução $x = \varphi(t)$ da equação degenerada quando $\varepsilon \to 0$, como pode afastar-se rapidamente dela.

No primeiro caso a solução $x = \varphi(t)$ da equação (4) diz-se estável, enquanto no segundo caso se diz instável.

Mais precisamente, se ao passar pelo gráfico da função $x = \varphi(t)$, o sinal da função $f(t, x)$ muda de + para −, quando x aumenta e com t fixo, então a solução $x = \varphi(t)$ da equação degenerada é estável e pode substituir a solução $x(t, \varepsilon)$ da equação (2) (Fig. 47).

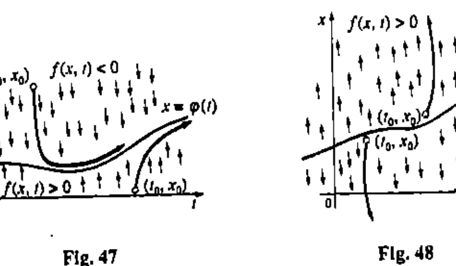


Fig. 47

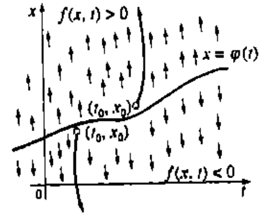


Fig. 48

Mas se o sinal da função $f(t, x)$ passar de − para +, então a solução $x = \varphi(t)$ da equação (4) é instável e a solução $x(t, \varepsilon)$ da equação diferencial (2) não pode ser substituída por ela (Fig. 48).

As condições suficientes de estabilidade e instabilidade são expressas pelas seguintes proposições:

1. Se na solução $x = \varphi(t)$ da equação (4) se verificar $\partial f(t, x)/\partial x < 0$, então esta solução é estável.

2. Se na solução $x = \varphi(t)$ da equação (4) se verificar $\partial f(t, x)/\partial x > 0$, então esta solução é instável.

Se a equação degenerada $f(t, x) = 0$ admitir várias soluções $x = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, cada uma delas deve ser investigada separadamente quanto à estabilidade. Neste caso, o comportamento das curvas integrais da equação diferencial (2) quando $\varepsilon \to 0$ pode diferir conforme a escolha das condições iniciais, ou seja, do ponto inicial (t_0, x_0).

Também é possível uma situação "semi-estável", em que a função $f(t, x)$ ao passar pela curva $x = \varphi(t)$ não muda de sinal; isto acontece, por exemplo se $x = \varphi(t)$ for uma raiz de multiplicidade par da equação degenerada (4). Neste caso, para valores pequenos de ε, as curvas integrais da equação (2) aproximam-se da curva $x = \varphi(t)$, dum lado dela, enquanto do outro lado se afastam.

No primeiro caso, diz-se que o ponto (t_0, x_0) pertence ao domínio de atracção da solução semi-estável $x = \varphi(t)$; no segundo caso, diz-se que pertence ao domínio de repulsão.

No caso semi-estável, em geral, não é possível substituir a solução da equação (2) pela solução da equação degenerada (4).

São conhecidos critérios que permitem saber quando é que as curvas integrais da equação (2), para uma escolha adequada do ponto inicial (t_0, x_0), se aproximam da solução $x = \varphi(t)$ da equação (4) e se mantêm na sua vizinhança, para $t > t_0$; estes critérios, porém, só são válidos na ausência de perturbações da equação (2).

Vamos enunciar esses critérios.

Suponhamos que numa vizinhança duma solução semi-estável $x = \varphi(t)$ da equação degenerada (4) a função $f(x, t)$ é não negativa. Se $\varphi'(t) > 0$, então as curvas integrais da equação (2) que se aproximam da curva $x = \varphi(t)$ não podem intersectar esta curva e mantêm-se numa vizinhança dela para $t > t_0$ (para isso, o ponto (t_0, x_0) deve situar-se no domínio de atracção da solução semi-estável $x = \varphi(t)$; se este ponto se encontrar no domínio de repulsão, a curva integral correspondente da equação (2) vai afastar-se rapidamente da curva $x = \varphi(t)$) (Fig. 49). Se $\varphi'(t) < 0$, as curvas integrais que se aproximam do gráfico de da função $x = \varphi(t)$ por um lado, intersectam-no e, pelo outro lado, afastam-se rapidamente dele. Se $\varphi'(t) > 0$, quando $t_0 \le t < t_1$, e $\varphi'(t) < 0$, quando $t > t_1$, então, se for suficientemente pequeno, as curvas integrais que saem do ponto (t_0, x_0), pertencente ao domínio de atracção de $x = \varphi(t)$, mantêm-se perto desta curva quando $t_0 + \delta < t < t_1$, onde $\delta > 0$; numa vizinhança do ponto $t = t_1$, intersectam a curva $x = \varphi(t)$ e depois afastam-se dela.

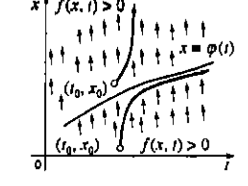


Fig. 49

Se, numa vizinhança da solução semi-estável $x = \varphi(t)$, a função $f(t, x)$ for não positiva, as proposições acima formuladas tornar-se-ão verdadeiras se trocarmos o sinal da derivada $\varphi'(t)$ pelo oposto.

EXEMPLO 1. Verificar se a solução $x = x(t, \varepsilon)$ da equação

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = t^2 - x \tag{5}$$

onde $\varepsilon > 0$, que satisfaz a condição inicial $x\big|_{t=t_0} = x_0$, tende para a solução da equação degenerada $x = t^2$, quando $t > t_0$ e $\varepsilon \to 0$.

Resolução. Neste caso, verifica-se $\partial f(t, x)/\partial x = \partial(t^2 - x)/\partial x = -1 < 0$, de tal modo que a solução da equação degenerada $x = t^2$ é estável e, por conseguinte, a solução da equação (5) que parte de qualquer ponto (t_0, x_0) tende para a solução da equação degenerada quando $\varepsilon \to 0$ e $t > t_0$.

Este facto também pode ser verificado directamente. Resolvendo a equação (5) como uma equação diferencial linear não homogénea, e atendendo à condição inicial $x\big|_{t=t_0} = x_0$, obtém-se

$$x(t, \varepsilon) = (x_0 - t_0^2 + 2\varepsilon t_0 - 2\varepsilon^2)\, e^{-\frac{t-t_0}{\varepsilon}} + t^2 - 2\varepsilon t + 2\varepsilon^2, \tag{6}$$

donde resulta imediatamente que, quando $t > t_0$ (isto é, $t - t_0 > 0$) e $\varepsilon \to 0$, se verifica $x(t, \varepsilon) \to t^2$.

EXEMPLO 2. Investigar, quanto à estabilidade, a solução da equação degenerada, no caso de a equação diferencial ter a forma

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = x(e^x - 2).$$

Resolução. A equação degenerada tem duas soluções:

1) $x = 0$, 2) $x = \ln 2$.

No primeiro caso verifica-se

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = (e^x - 2 + xe^x)\big|_{x=0} = -1, \tag{7}$$

pelo que a solução $x = 0$ é estável; no segundo caso

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\Big|_{x=\ln 2} = (e^x - 2 + xe^x)\big|_{x=\ln 2} = 2\ln 2 > 0, \tag{8}$$

pelo que a solução $x = \ln 2$ da equação degenerada é instável (Fig. 51).

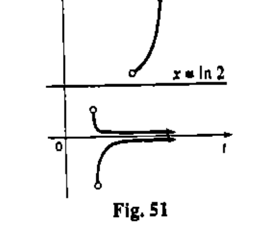


Fig. 51

EXEMPLO 3. Investigar quanto à estabilidade a solução da equação degenerada que corresponde à equação diferencial $\varepsilon\, dx/dt = (x-t)^2$.

Resolução. A equação degenerada $(x-t)^2 = 0$ tem $x = t$ como raiz de multiplicidade 2. Na vizinhança desta raiz verifica-se $f(t, x) = (x-t)^2 > 0$, $\varphi(t) = t$ e $\varphi'(t) = 1 > 0$. Por conseguinte, a solução $x = t$ é semi-estável; se o ponto inicial (t_0, x_0) estiver situado no semiplano abaixo da recta $x = t$ (domínio de atracção da raiz $x = t$), a curva integral $x = x(t, \varepsilon)$ que sai desse ponto mantém-se numa vizinhança da linha $x = t$ quando $t > t_0$ (Fig. 52).

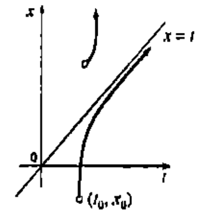


Fig. 52

Investigar as seguintes equações diferenciais quanto à estabilidade das soluções das respectivas equações degeneradas.

960. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = x - t^2$.

961. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = x(t^4 + 1 - x)$.

962. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = (x-t)(x - e^t)$.

963. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = x^2 - t^2$.

964. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = xt$.

965. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = (x-t)(\ln x - t^2 - 1)$.

966. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = (t+x)^2$.

967. $\varepsilon \dfrac{dx}{dt} = x - t + 1$.

SOLUÇÕES

1. Se $y(x)$ for uma solução da equação diferencial, então transforma-a numa igualdade verdadeira. Por isso, se as equações *a*) e *b*) tiverem uma solução coincidente, então os seus primeiros membros e, por conseguinte, os segundos membros, são iguais entre si: $y^2 + 2x - x^4 = -y^2 - y + 2x + x^2 + x^4$. Daqui obtém-se $y = x^2$, $y = -x^2 - 1/2$. A segunda destas funções não satisfaz a equação *a*), pelo que deve ser rejeitada. Logo, $y = x^2$. **13.** $y = 0$. **17.** $\alpha = \operatorname{arctg} 1/2$. **18.** $\alpha = \pi/4$. **19.** Os pontos de extremo das curvas integrais situam-se na recta $x = -1$. **20.** Os pontos de inflexão das curvas integrais encontram-se na parábola $y = x^2 + 2x$.

21. **22.** **23.**

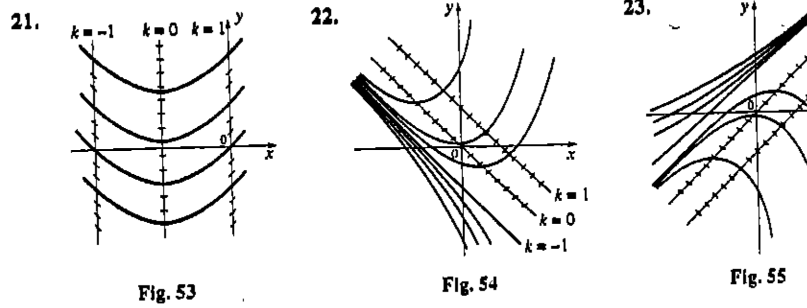
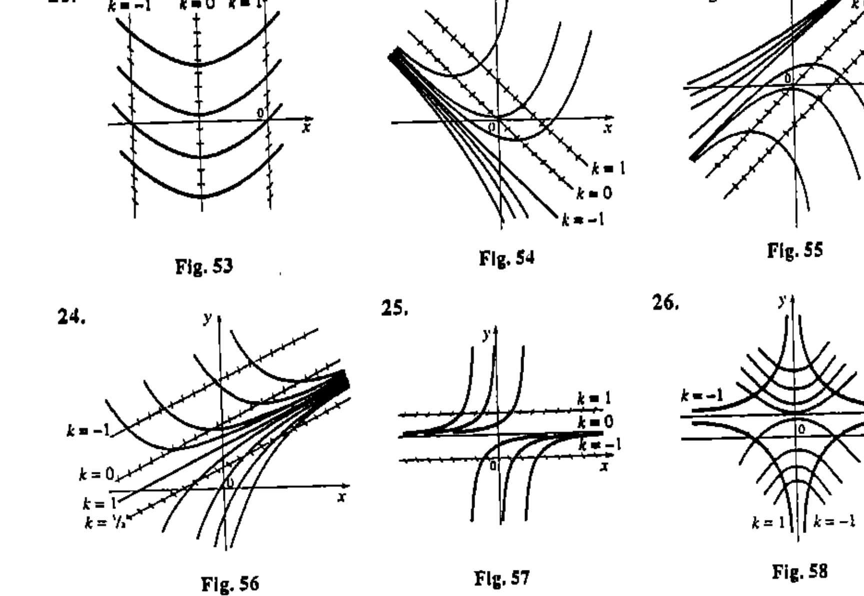


Fig. 53 Fig. 54 Fig. 55

24. **25.** **26.**



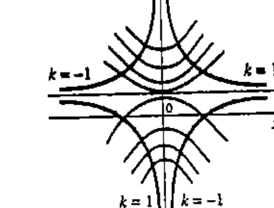


Fig. 56 Fig. 57 Fig. 58

27.

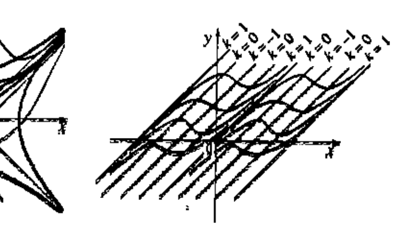


Fig. 59

28.

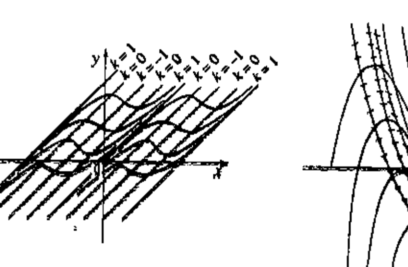


Fig. 60

29.

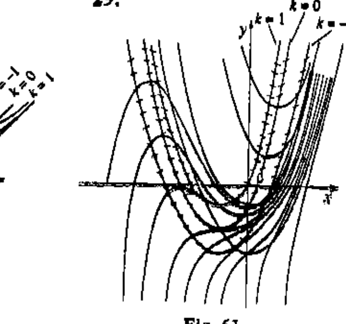


Fig. 61

30.

Fig. 62

31.

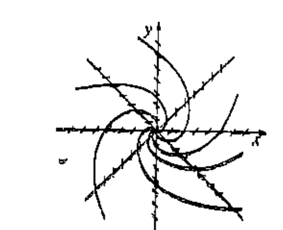


Fig. 63

32.

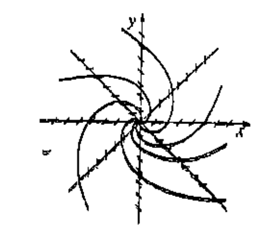


Fig. 64

41. $y_0(x)=0,\ y_1(x)=\dfrac{1+x^3}{3},\ y_2(x)=\frac{1}{126}(33-14x+42x^3-7x^4-2x^7).$

42. $y_0(x)=0,\ y_1(x)=\dfrac{x^2}{2},\ y_2(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^5}{20}.$

43. $y_0(x)=1,\ y_1(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2},\ y_2(x)=1+x+x^2+\dfrac{x^3}{6}.$

44. $y_0(x)=2,\ y_1(x)=2+x-\frac{2}{3}x^3,\ y_2(x)=2+x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4.$

45. $y_0(x)=2,\ y_1(x)=2x-\ln x,\ y_2(x)=2+\ln^2 x.$

46. $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\tilde{C}$, ou $x+y=C(1-xy)$. 47. $x^2(1+y^2)=C$. 48. $y=\sin x$.

49. $y=\operatorname{tg}\ln Cx$. 50. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$. 51. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1,\ y=1$.

52. $e^x=C(1-e^{-y})$. 53. $y=1$. 54. $a^x+a^{-y}=C$. 55. $1+e^y=C(1+x^2)$.

56. $y=\sin[C+\ln(1+x^2)]$. 57. $\operatorname{arctg} e^x=\dfrac{1}{2\sin^2 y}+C$. 58. $y=(1+Cy+\ln y)\cos x$.

59. $x+C=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{y-x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$. 60. $b(ax+by+c)+a=Ce^{bx}$. 61. $x+y=a\operatorname{tg}\left(C+\dfrac{y}{a}\right)$.

62. $y=-\dfrac{1}{x}$. 63. $y=a\operatorname{tg}\sqrt{\dfrac{a}{x}-1}$. 64. $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=e^{2\sin x}$. 65. $y'=3y,\ y=-2e^{3x}$.

66. $\int_0^x y\,dt=a^2\ln\dfrac{y}{a};\ y=\dfrac{a^2}{a-x}$ (hipérbole). 67. $\dfrac{dv}{dt}=20\dfrac{t}{v},\ v=50\sqrt{29}$ cm/s.

69. $m\dfrac{dv}{dt}=kv^2,\ t=\dfrac{h(v_0-v_0)}{v_0 v_1\ln\dfrac{v_1}{v_0}}=\dfrac{3}{40\ln 2{,}5}$ s. 70. $m\dfrac{dv}{dt}=-kv,\ t=-\dfrac{5\ln 10}{\ln 0{,}8}$ s.

72. $\dfrac{dT}{dt}=k(T-T_0);\ T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20};\ t=60$ min. 73. $y'=n\dfrac{y}{x};\ y=Cx^n$.

74. $\dfrac{dS}{dt}=kS;\ S=25\cdot 2^{t/5}$. 75. 18,1 Kg; $\dfrac{dx}{dt}=k\left(\frac{1}{3}-\dfrac{x}{300}\right)$, k — coeficiente de proporcionalidade.

76. 5,2 Kg; $\dfrac{dx}{dt}=kx\left(\dfrac{10-x}{90}-\frac{1}{3}\right)$. 77. $xy=C$. $(C\neq 0)$ 78. 0,82 Kg; $\dfrac{ds}{dt}=ks(s+6)$.

79. 32,2 min. 80. $T=\frac{2}{3}x$; 864 000·4,2 J; $\dfrac{dT}{dx}=-\dfrac{Q}{kS}$, onde $Q=$const.

83. $y=0$, quando $\alpha\leq 1$ a solução é única. 85. $y=\dfrac{\pi}{2}(2n+1)x+C,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$

86. $y=C$. 87. $y=(-1)^n\left(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\right)+n\pi x+C,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$ 88. $y=e^x+C$.

89. $y=n\pi x+C,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$ 90. $y=x(\ln x-1)+C$.

91. $y=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+n\pi x+C,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$

92. $y=\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{x}\right)+5\pi$. 93. $y=\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+3\pi$. 94. $y=2\operatorname{arctg}\left(1-\dfrac{1}{2x^2}\right)+\dfrac{9\pi}{2}$.

95. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x\right)+\frac{7}{2}\pi$. 96. $y=0$. 97. $y=1$. 98. $y=-\pi$.

99. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{2x}+\frac{9}{4}\pi$. 100. $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}=\ln Cx$. 101. $y=x(C-\ln x)$. 102. $y=x\,e^{1+Cx}$.

103. $(x-y)\ln Cx=x$. 104. $y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2,\ y=x,\ y=-x$. 105. $2x=(x-y)\ln Cx$.

106. $y^2-3xy+2x^2=C$. 107. $y^2+2xy-x^2=C$. 108. $y=1+(x-1)\ln C(x-1)$.

109. $(x+y-1)^5(x-y-1)^2=C$. 110. $y^2-2xy-x^2-8y+4x=C$.

111. $y^2-2xy-x^2+4y=C$. 112. $y^2+3xy+x^2-5x-5y=C$. 113. $(4x+2y+1)^2=4x+C$.

114. $x+3y-\ln|x-2y|=C$. 115. $(x+y-1)^2+2x=C$. 116. $y^2=x\ln Cy^2$.

117. $Cx^4=y^6+x^3$. 118. $\sqrt{x^2y^4+1}=Cx^2y^2-1$. 119. $2\operatorname{arctg}\dfrac{y^3}{x}=\ln(x^2+y^6)+C$.

120. $x^2+y^2=Cx$. 121. $y=\frac{1}{2}\left(Cx^{1-k}-\dfrac{1}{C}x^{1+k}\right)$. 122. $y^2=2Cx+C^2$.

123. $y=\frac{1}{2}\left(Cx^2-\dfrac{1}{C}\right)$. 124. $x^2+y^2=Cx^4$. 125. $y=C\,e^{-2x}+e^{-x}$. 126. $y=x-x^2$.

127. $y=(C+x^2)\,e^{x^2}$. 128. $y=(C+x)\,e^{-x^2}$. 129. $y=\dfrac{x^2}{\cos x}$. 130. $y=Cx^2+x^2\sin x$.

131. $y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$. 132. $y=(C+x^3)\ln x$. 133. $x=Cy-\dfrac{y^2}{2}$. 134. $y=1$.

135. $x=\dfrac{C}{y}+y\ln y$. 136. $x=(C+y)\,e^{-\frac{y^2}{2}}$. 137. $y=(C+x^2)\,e^{e^x}$. 138. $y=(C+x)\,e^{(1-x)e^x}$.

139. $i(t)=\dfrac{E_0}{R^2+(2n\pi L)^2}\left[R\sin 2n\pi t+2n\pi L\left(e^{-\frac{Rt}{L}}-\cos 2n\pi t\right)\right]+I_0\,e^{-\frac{Rt}{L}}$.

140. $q=QE(1-e^{-t/QR})$; $R\dfrac{dq}{dt}=E-\dfrac{q}{Q}$.

141. $v=\dfrac{k_1}{k_2}\left(t-\dfrac{m}{k_2}+\dfrac{m}{k_2}\,e^{-\frac{k_2 t}{m}}\right)$; $m\dfrac{dv}{dt}=k_1t-k_2v$, $v(0)=0$. 142. $y=Cx-x^2$; $y-xy'=x^2$.

143. $y=C\sqrt{x}-x$; $y-xy'=\dfrac{x+y}{2}$. 144. $y(x)=y_1(x)+C\,e^{-\int p(x)\,dx}$.

145. $y=y_1(x)+C[y_2(x)-y_1(x)]$. 148. $y=2^{\sin x}$. 149. $y=e^{-x}$. 150. $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

151. $y=\dfrac{x+1}{x\cos\frac{1}{x}}$. 152. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1$. 153. $y=e^x+e^{\frac{1}{x}}$. 154. $y=x$.

155. $y=\dfrac{x}{\sin x}$. 156. $y=\cos x$. 157. $y=\dfrac{1}{1+C\,e^{x^2}}$. 158. $y^3=x^3+Cx^2$.

159. $x^3e^{-y}=C+y$. 160. $y=\dfrac{e^{-x^2}}{C-x}$. 161. $\sqrt{y}+1=C\,e^{e^x}$. 162. $y^2\ln x=C+\sin x$.

163. $y^2(C-x)\sin x=1$. 164. $y^4+2x^2y^2+2y^2=C$. 165. $y=\dfrac{1}{C\,e^{-\sin x}-1}$.

166. $\sin y=(x+C)\,e^x$, $z=\sin y$. 167. $\ln y=(x+C)\,e^x$, $z=\ln y$.

168. $\sin y=x+C\,e^{-x}$, $z=\sin y$. 169. $x-2+C\,e^{-x}=e^{y^2/2}$, $z=e^{y^2/2}$.

170. $\operatorname{tg} y=(C+x^2)\,e^{-x^2}$, $z=\operatorname{tg} y$. 171. $xy=C$. 172. $y=(x+1)\,e^x$.

173. $y=2-(2+a^2)\,e^{\frac{x^2-a^2}{2}}$. 174. $y=Cx^{\frac{1-n}{n}}$. 175. $x^4+x^2y^2+y^4=C$.

176. $x^3+3x^2y^2+y^4=C$. 177. $\sqrt{x^2+y^2}+\ln|xy|+\dfrac{x}{y}=C$. 178. $x^3\operatorname{tg} y+y^4+\dfrac{y^3}{x^2}=C$.

179. $x^3y+x^2-y^2=Cxy$. 180. $\dfrac{\sin^2 x}{y}+\dfrac{x^2+y^2}{2}=C$. 181. $x^3+y^3=x^2-xy+y^2=C$.

182. $y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln x=C$. 183. $\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{y}{x}=C$.

184. $x\sin y-y\cos x+\ln|xy|=C$. 185. $\operatorname{tg} xy-\cos x-\cos y=C$. 186. $y=x$.

187. $(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=C$. 188. $xy(x^2+y^2)=C$. 189. $x^2y^2-2x^2y-2=Cx$; $\mu=1/x^2$.

190. $x-\dfrac{y}{x}=C$; $\mu=1/x^2$. 191. $x\ln|x|-y^2=Cx$; $\mu=1/x^2$.

192. $5\operatorname{arctg} x+2xy=C$; $x=0$; $\mu=\dfrac{1}{1+x^2}$. 193. $y^3+x^3(\ln x-1)=Cx^2$; $\mu=1/x^4$.

194. $2e^x\sin y+2e^x(x-1)+e^x(\sin x-\cos x)=C$; $\mu=e^x$. 195. $x^2-\dfrac{7}{y}-3xy=C$; $\mu=1/y^2$.

196. $(x+y^2)^2\,C=x-y^2$; $\mu=\dfrac{1}{(x+y^2)^3}$. 197. $1+y^2-x^2=Cx$; $\mu_2=1/x^2$; $\mu_1=\dfrac{1}{(1+y^2-x^2)^2}$.

198. $y-1=C\sqrt{x^2+y^2}$; $\mu=(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$. 199. $(y-C)^2=x^3$.

200. $\ln Cy = x \pm 2e^{\frac{x}{2}}$, $y = 0$. **201.** $y = 2x^3 + C$, $y = -x^2 + C$.

202. $xy = C$, $x^2y = C$. **203.** $y = \frac{x^2}{2} + C$, $y = Ce^x - x - 1$. **204.** $4e^{-y/3} = (x+2)^{4/3} + C$.

205. $y = \frac{x^2}{2} + C$, $y = -\frac{x^2}{2} + C$, $y = Ce^x$. **206.** $y = Ce^x + \frac{1}{C}$, $y = \pm 2e^{x/2}$.

207. $y = Cx + \frac{1}{2}(x^2 - C^2)$, $y = x^2$. **208.** $\begin{cases} x = e^p(p+1) + C, \\ y = p^2 e^p, \ y = 0. \end{cases}$

209. $\begin{cases} x = \ln|\ln p| + \frac{1}{\ln p} + C, \\ y = \frac{p}{\ln p}. \end{cases}$ **210.** $\begin{cases} x = \ln p + \sin p, \\ y = C + p(1 + \sin p) + \cos p. \end{cases}$

211. $\begin{cases} x = p^2 - 2p + 2, \\ y + C = \frac{2}{3}p^3 - p^2. \end{cases}$ **212.** $\begin{cases} x + c = \frac{(\ln p + 1)^2}{2}, \\ y = p \ln p. \end{cases}$ **213.** $\begin{cases} x = e^p + C, \\ y = (p-1)e^p; \ y = -1. \end{cases}$

214. $\begin{cases} x = \frac{e^{1/p}}{p^2}, \\ y = C + e^{1/p}\left(1 + \frac{1}{p}\right). \end{cases}$ **215.** $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y + C = -a\sin^3 t, \ p = \operatorname{tg} t. \end{cases}$ **216.** $\begin{cases} x = 5\left\{\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 t - \operatorname{tg} t + t\right)\right\} + C, \\ y = a\sin^5 t. \end{cases}$

217. $\begin{cases} x = p + \sin p, \\ y + C = \frac{1}{2}p^2 + p\sin p + \cos p. \end{cases}$ **218.** $\begin{cases} x + C = \ln|p| + \sin p + p\cos p, \\ y = p + p^2 \cos p. \end{cases}$

219. $\begin{cases} x + C = 2\operatorname{arctg} p - \ln\left|\frac{1 + \sqrt{1 - p^2}}{p}\right|, \\ y = \arcsin p + \ln(1 + p^2), \ y = 0. \end{cases}$ **220.** $\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}, \\ y = \frac{2C}{p} + \ln p - 2. \end{cases}$

221. $\begin{cases} x = 2(1-p) + Ce^{-p}, \\ y = \left[2(1-p) + Ce^{-p}\right](1+p) + p^2. \end{cases}$ **222.** $\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{\cos p}{p^2} - \frac{\sin p}{p}, \\ y = \frac{2C}{p} - \frac{2\cos p}{p} - \sin p, \ y = 0. \end{cases}$

223. $\begin{cases} x = \frac{Cp^2 + 2p - 1}{2p^2(p-1)^2}, \\ y = \frac{Cp^2 + 2p - 1}{2(p-1)^2} - \frac{1}{p}. \end{cases}$ **224.** $\begin{cases} x = \frac{C}{p^3} - 2e^p\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3}\right), \\ y = \frac{3C}{2p^2} - 2e^p\left(1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2}\right). \end{cases}$

225. $y = Cx + \frac{a}{C^2}$; $4y^3 = 27ax^2$. **226.** $y = Cx + C^2$; $y = -\frac{x^2}{4}$.

227. $y = Cx - \frac{C-1}{C}$; $(y+1)^2 = 4x$. **228.** $y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}$; $x^2 + y^2 = a^2$.

229. $x = Cy + C^2$; $4x = -y^2$. **230.** $xy = \pm a^2$. **231.** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

232. $y = e^x + \frac{1}{C + e^x}$. **233.** $y = \sin x + \frac{1}{C + x}$. **234.** $y = x + \frac{1}{Cx + 1}$.

235. $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{(C - \ln x)x}$.

236. Neste caso $\frac{dy}{dx} = -\left[a(x)y^2 + b(x)y + c(x)\right]$; $\frac{dy}{dx} = -c(x)\left[\frac{a(x)}{c(x)}y^2 + \frac{b(x)}{c(x)}y + 1\right]$;

$\frac{dy}{dx} = -c(x)\left(\frac{m}{p}y^2 + \frac{n}{p}y + 1\right)$ e as variáveis são separáveis. Temos

$C - \int c(x)\,dx = \frac{1}{p}\int \frac{dy}{my^2 + ny + p}$.

238. $y + xy' = 0$. **239.** $x^2 + y^2 = 2xyy'$. **240.** $xy' = y \ln y'$. **241.** $y'^2 + y' - xy' + y = 0$.

242. $y'' - 2y' + y = 0$. **243.** $yy'^2 + 2xy' = y$. **244.** $y''' = 0$. **245.** $y''' + \frac{3}{x}y'' = 0$.

246. $y''^2 = (1 + y'^2)^3$. **247.** $y'' - y = 0$. **248.** $y'' + y = 0$. **249.** $2x^2 + y^2 = C$.

250. $x^2 + ny^2 = C$. **251.** $2x + \sigma y^2 = C$. **252.** $\sin y = Ce^{-x}$. **253.** $y^2 = Cx$.

254. $xy = C$. **255.** $y = Cx$, se $k = 2$; $\frac{1}{x^{k-2}} - \frac{1}{y^{k-2}} = \frac{1}{C^{k-2}}$, se $k \neq 2$.

256. $x^2 + y^2 = Cx$. **257.** $xy^3 = C$. **258.** $\rho = C(1 - \cos\varphi)$. **259.** $y = Ce^{-x/2}$.

260. $y^2 = 4x + 4$. **261.** $y = 0$. **262.** $y = 0$, $y = \frac{4}{27}x^3$.

263. Não existem soluções singulares. **264.** $a = 0$, $y = 0$. **265.** $4y + x^5 = 0$.

266. $4xy^2 + 1 = 0$. **267.** $y = x - \frac{4}{27}$. **268.** Não existem soluções singulares.

269. $y = x^2/4$. **270.** $y = 0$; $y = 4x$. **271.** $y = \pm 1$. **272.** $y = \pm 2e^{x/2}$.

273. $y = x$; $y = -x/3$. **274.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **275.** $y = x - \frac{1}{x+C}$.

276. $y = C\frac{\sin x}{x} + \cos x$. **277.** $y^{1-n} = 2\sin x + \frac{2}{n-1} + C\,e^{(n-1)\sin x}$.

278. $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = C$. **279.** $15x^2y - 24xy^2 - 12x^3 + 2y^3 = C$.

280. $6y + 12y^3 - 9x^2y^2 + 2x^3 = C$. **281.** $2 + xy\ln^2 x = Cxy$; $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$.

282. $y = C\,e^{-x^2} + (\sin x - x\cos x)\,e^{-x^2}$. **283.** $x = C\,e^{2y} + \frac{y^2+y}{2} + \frac{1}{4}$.

284. $y + C = 2x - \frac{x^2}{2} + 2\ln|1-x|$. **285.** $y^2 = Cx^2 + x^4$. **286.** $y(y-2x)^3 = C(y-x)^2$.

287. $y = C(2x-1) + \frac{1}{x}$. **288.** $x + y - 1 = C\,e^{\frac{2x+2}{x+y-1}}$. **289.** $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right| = C - 2\cos\frac{x}{2}$.

290. $y = C(3x^2 - 2x)$. **291.** $y^3 = Cx^3 + x^4$. **292.** $x + y\,e^{x/y} = 1 + e$.

293. $\ln|x| - \frac{y^2}{2x^2} = C$. **294.** $\ln|2x - 2y + 5| - 2(x+y-2) = C$. **295.** $x^2y + 2x = Cy$.

296. $x^2 + y^2 = C\,e^{-x}$. **297.** $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{y^2-y+1} - \sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right) = C$.

298. $x = y^2(1 + C\,e^{1/y})$. **299.** $\sin x + 2y\ln|y| - Cy = 0$. **300.** $3e^{-2y} = C\,e^{-2x} - 2e^x$).

301. $x^4 + y^2 = C(x^2 + y)$. **302.** $\frac{1}{x} = \frac{C}{y^2} + \frac{y^n}{n+2}$; $n \neq -2$.

303. $7(3y - 4x) + (4a^2 - 3b^2)\ln\left|7(x+y) + a^2 + b^2\right| = C$. **304.** $x\,e^{y^2/x} = C$.

305. $y(1 + x + \ln x) = 1$. **306.** $y[\sin(\ln y) + \cos(\ln y)] = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$.

307. $\left(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right)^3 = C\left(3y - 1 + \sqrt{9y^2 - 6y + 2}\right)$. **308.** $(x-y)(x + 7y - 4) = C$.

309. $x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = 5$. **310.** $y^2 = C\,e^{y^2/x}$. **311.** $2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3} + \ln C(y+2) = 0$.

312. Ao passar de uma curva para outra que lhe é simétrica, em relação ao ponto 0(0,0), as variáveis x, y e y' são substituídas por $-x$, $-y$ e y', respectivamente, pelo que a equação considerada continua a ser satisfeita. **313.** Para que a recta $y = kx + b$ seja uma linha integral da equação dada, tendo em conta que $y' = k$, é necessário e suficiente que $y = kx + b \equiv k + xk^2$, ou seja, $k = 0$ ou $k = 1$ e $b = k$.

314. $3y^2 - 2x = C$. **315.** $y = \operatorname{ch}$ e $y = 1$. **317.** *a*) Não podem; *b*) Não podem; *c*) Podem.

327. $y = \frac{x^5}{120} + C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x + C_4$. **328.** $y = \frac{x^4}{24} - \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

329. $y = \frac{1}{12(x+2)^3}$. **330.** $y = (x-2)\,e^x + x + 2$. **331.** $y = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{5}{18}x^3 + C_1x + C_2$.

332. $y = C_1x^2 + C_2$. **333.** $y = C_1\ln|x| + C_2$. **334.** $y = C_1\,e^{x^3} + C_2$.

335. $y = \frac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2$. **336.** $y = C_1x(\ln x - 1)$. **337.** $y = \left(C_1x - C_1^2\right)e^{\frac{x}{C_1}+1} + C_2$.

338. $y = \frac{\sqrt{2}}{5}x^{5/2}$. **339.** $y = C_3 + C_2x - \sin(x + C_1)$. **340.** $y = C_1x^3 + C_2x + C_3$.

341. $y = \operatorname{ch}(x + C_1) + C_2$. **342.** $y = C_2 - \ln|C_1 - x|$. **343.** $y = C_2 - \cos(C_1 + x)$.

344. $y = C_2 - \ln\left|\cos(C_1 + x)\right|$. **345.** $y = \frac{(x+C_1)^3}{12} - x + C_2$. **346.** $y = x$. **347.** $y = -2x$.

348. $y = C_2 - \ln\left|1 - e^{x+C_1}\right|$. **349.** $(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = 9$.

350. $y = (x + C_1)\ln|x + C_1| + C_2x + C_3$. **351.** $y = C_2\,e^{C_1x}$. **352.** $y = \frac{1}{1-x}$.

353. $y = \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3$. **354.** $y = \frac{4}{(x+4)^2}$. **355.** $y^2 = C_1x + C_2$. **356.** $y = \frac{1}{C_1}(1 + C_2\,e^{C_1x})$.

357. $y = C_1\operatorname{ch}\frac{x + C_2}{C_1}$. **358.** $y = \frac{1}{C_1}\left[1 + \frac{(C_1x + C_2)^2}{4}\right]$. **359.** $y = \sqrt{2x - x^2}$.

360. $C_1 x + C_2 = \ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|$. **361.** $y = -\ln|x-1|$. **362.** $y \cos^2(x + C_1) = C_2$.

363. $y = \frac{4}{(x-2)^2}$. **364.** $(x - C_1)^2 - C_2 y^2 + kC_2^2 = 0$. **365.** Parábola.

366. $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x^2}$, onde x é a distância do corpo ao centro da Terra; $t \approx 122$ h.

367. $m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x^3}$; $x^2 = \frac{a^2}{C_1} \times (t + C_2)^2 + C_1$; $a^2 = \frac{k}{m}$.

368. $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$; $x = \frac{m}{k}\ln\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} = \frac{m}{k}\ln \operatorname{ch} \alpha t$; $\alpha = \sqrt{\frac{kg}{m}}$.

369. $Cx = y^{2k-1}$ $(k > 1/2)$. **370.** $(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = R$, onde R = const. **371.** Sim.

372. Não. **373.** Não. **374.** Sim. **375.** Sim. **376.** Sim. **377.** Não. **378.** Não.

379. Não. **380.** Não. **381.** Não. **382.** Não. **383.** Não. **384.** Não. **385.** Sim.

386. Não. **389.** 1. **390.** $-\frac{2}{x}$ $(x \neq 0)$. **391.** 0. **392.** e^{-2x}. **393.** 0.

394. $-8\sin^3 x$. **395.** $-1/\sqrt{2}$. **396.** $\frac{\pi}{2\sqrt{\pi^2 - x^2}}$; $|x| < \pi$. **397.** 0. **398.** 0.

399. $1 - \ln x$; $x > 0$. **400.** $\frac{x-1}{x^3}e^{1/x}$; $x \neq 0$. **401.** $-e^{2x}$. **402.** $-2e^{-6x}$. **403.** 1.

410. $9y'' - 6y' + y = 0$. **411.** $y'' + 3y' + 2y = 0$. **412.** $2y'' - 3y' - 5y = 0$.

413. $y''' + 3y'' + 2y' = 0$. **414.** $y^{IV} + 2y'' + y = 0$. **415.** $y''' = 0$.

416. $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. **417.** $y'' - 2y' + y = 0$; $y = (C_1 + C_2 x)e^x$.

418. $y'' - 6y' + 13y = 0$; $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

419. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; $y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$. **420.** $y'' - y' = 0$.

421. $y'' - y' = 0$. **422.** $y'' + 4y' + 4y = 0$. **423.** $y'' + 9y = 0$. **424.** $y'' = 0$.

425. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. **426.** $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

427. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$. **428.** $y''' - y'' = 0$. **429.** $y''' + y' = 0$.

430. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$. **431.** $y''' + 2y'' + 2y' = 0$. **432.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

433. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$. **434.** $y = e^x(1 + x)$. **435.** $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$.

436. $y = 4e^x + 2e^{3x}$. **437.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$. **438.** $y = C_1 e^{(1-\sqrt{3})x} + C_2 e^{(1+\sqrt{3})x}$.

439. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6 x)$. **440.** $y = e^x\left(C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}\right)$.

441. $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}\left(C_2 \cos\sqrt{3}\,x + C_3 \sin\sqrt{3}\,x\right)$.

442. $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$. **443.** $y = e^x \sin x$.

444. $y = e^x\left(\cos\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,x\right)$. **445.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{-x}(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$.

446. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + e^{-x}(C_3 + C_4 \cos x + C_5 \sin x)$. **447.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$.

448. $y = C_1 + e^x(C_2 \cos x + C_3 \sin x)$. **449.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

450. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_{10} x^9$. **451.** $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{2x}$.

452. $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{x/2}$. **453.** $y = x + e^{-x}$. **454.** $y_{p,n} = A_1 x^2 + A_2 x + A_3$.

455. $y_{p,n} = A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x$. **456.** $y_{p,n} = A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2$. **457.** $y_{p,n} = e^{-x}(A_1 + A_2 x)$.

458. $y_{p,n} = e^{-x}(A_1 x + A_2 x^2)$. **459.** $y_{p,n} = e^{-x}(A_1 x^2 + A_2 x^3)$. **460.** $y_{p,n} = A \sin x + B \cos x$.

461. $y_{p,n} = x(A \sin x + B \cos x)$. **462.** $y_{p,n} = x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

463. $y_{p,n} = x(C_1 \cos kx + C_2 \sin kx)$. **464.** $y_{p,n} = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

465. $y_{p,n} = x e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. **466.** $y_{p,n} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2$.

467. $y_{p,n} = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$. **468.** $y_{p,n} = C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 x^4$.

469. $y_{p,n} = C_1 x^3 + C_2 x^4 + C_3 x^5$. **470.** $y_{p,n} = x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

471. *a)* $y_{p,n} = (A_1 + A_2 x + A_3 x^2)\, e^{kx}$, *b)* $y_{p,n} = (C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3)\, e^{kx}$,

c) $y_{p,n} = (C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 x^4)\, e^{kx}$, *d)* $y_{p,n} = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\, e^{kx}$,

e) $y_{p,n} = (C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 x^4)\, e^{kx}$, *f)* $y_{p,n} = (C_1 x^3 + C_2 x^4 + C_3 x^5)\, e^{kx}$.

472. *a)* $y_{p,n} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, *b)* $y_{p,n} = x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$.

473. *a)* $y_{p,n} = x(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)\, e^{3x}$, *b)* $y_{p,n} = x^2 (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\, e^{3x}$.

474. $y_{p,n} = Cx$. **475.** $y_{p,n} = C_1 x + C_2 x^2 + C_x x^3$. **476.** $y_{p,n} = C\, e^x$. **477.** $y_{p,n} = Cx\, e^{-7x}$.

478. $y_{p,n} = (C_1 x^2 + C_2 x^3)\, e^{4x}$. **479.** $y_{p,n} = Cx^2 e^{5x}$. **480.** $y_{p,n} = (C_1 x + C_2 x^2)\, e^{3/4\, x}$.

481. $y_{p,n} = (C_1 x + C_2 x^2)\, e^{4x}$. **482.** $y_{p,n} = x(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$.

483. $y_{p,n} = x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. **484.** $y_{p,n} = x(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

485. $y_{p,n} = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\, e^{2x}$. **486.** $y_{p,n} = x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\, e^{2x}$.

487. $y_{p,n} = x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\, e^{-3x}$. **488.** $y_{p,n} = x(C_1 \cos kx + C_2 \sin kx)$.

489. $y_{p,n} = C$ (C = const.). **490.** $y_{p,n} = C_1 + C_2 x$. **491.** $y_{p,n} = C$ (C = const.).

492. $y_{p,n} = Cx$. **493.** $y_{p,n} = Cx^2$. **494.** $y_{p,n} = C$ (C = const.). **495.** $y_{p,n} = Cx$.

496. $y_{p,n} = Cx^2$. **497.** $y_{p,n} = Cx^3$. **498.** $y_{p,n} = Cx^2$. **499.** $y_{p,n} = C\, e^{4x}$.

500. $y_{p,n} = Cx^2 e^{-x}$. **501.** $y_{p,n} = (C_1 x^2 + C_2 x^3)\, e^{-x}$. **502.** $y_{p,n} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

503. $y_{p,n} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. **504.** $y_{p,n} = (A_1 + A_2 x) \sin 2x + (B_1 + B_2 x) \cos 2x$.

505. $y_{p,n} = x^2 (C_1 \cos nx + C_2 \sin nx)$. **506.** $y_{p,n} = C \cos nx + C_2 \sin nx$.

507. $y_{p,n} = C^1 \sin x + C_2 \cos x$. **508.** $y_{p,n} = Cx^4 e^x$. **509.** $y_{p,n} = (C_1 x^4 + C_2 x^5)\, e^x$.

510. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x} - 2$. **511.** $y = C_1 + C_2 e^{-2x} - x$. **512.** $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 1$.

513. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{x^2}{2}$. **514.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\frac{2}{3}x} - \frac{3}{14} x^2$.

515. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{6x} + \frac{1}{6} x^3$. **516.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-\frac{x}{3}} + \frac{x^3}{3}$.

517. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (C_3 + C_4 x)\, e^x + 1$. **518.** $y = (C_1 + Cx)\, e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$.

519. $y = C_1 + C_2 e^{-8x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{8}$. **520.** $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}$.

521. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-2x} + 4x^2 e^{-2x}$. **522.** $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} - \frac{9}{2} x\, e^{-3x}$.

523. $y = C_1 + C_2 e^{x/7} - 7x^2 - 98x$. **524.** $y = C_1 + C_2 e^{-3x} - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right) e^{-3x}$.

525. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + (20x - 5x^2)\, e^{-2x}$. **526.** $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)\, e^{-x} \frac{x}{2}$.

527. $y = \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \times e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{3}(x^2 - x + 1)\, e^x$.

528. $y = C_1 e^{-(\sqrt{6}+2)^x} + C_2 e^{(\sqrt{6}-2)^x} - \frac{16 \cos 2x + 12 \sin 2x}{25}$.

529. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cos x + x^2 \sin x$.

530. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{mx} + \frac{2mn \cos nx + (m^2 - n^2) \sin nx}{(m^2 + n^2)^2}$.

531. $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\, e^{-x} - \frac{1}{4} x\, e^{-x} \cos 2x$.

532. $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{2 \cos mx + 3 \sin mx}{a^2 - m^2}$ $(|a| \neq |m|)$.

533. $y = C_1 + C_2 e^x + (\cos x + \sin x)\, e^x$. **534.** $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{3}(6 \sin x - 2 \cos x)\, e^x$.

535. $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)\, e^{-2x} + 5x\, e^{-2x} \sin x$.

536. $y = C_1 + C_2\,e^{-2x} - \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{30}\right)\cos x + \left(\frac{7}{30} - \frac{x}{20}\right)\sin x.$

537. $y = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{x} - \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^{x}.$ **538.** $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{-2x} + \frac{1}{18}\left(x^2 - x + \frac{7}{18}\right)e^{4x}.$

539. $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} - x + 1\right)e^{3x}.$ **540.** $y = C_1\,e^{x} + C_2\cos x + C_3\sin x - (x^2 + 3x + 1).$

541. $y = (C_1 + C_2\,x)\,e^{x} + C_3\cos x + C_4\sin x + \frac{x^2}{4}\,e^{x}.$

542. $y = (C_1 + C_2\,x)\,e^{x} + x_3 + 6x^2 + 18x + 24.$

543. $y = C_1 + C_2\,x + C_3\cos x + C_4\sin x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2.$

544. $y = \left(C_1 + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{6}\right)\cos x + \left(C_2 + \frac{x^2}{4}\right)\sin x.$

545. $y = (C_1 + C_2\,x)\,e^{-x} + \left[(6 - x^2)\cos x + 4x\sin x\right]e^{-x}.$

546. $y = C_1\,e^{x} + \left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{32}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}(\cos x - \sin x).$

547. $y = (C_1 + C_2\,x)\,e^{x} + (C_3 + C_4\,x)\,e^{-x} + \frac{1}{4}\cos x.$

548. $y = (C_1 + C_{2_x} + C_3\,x^2) - \frac{e^{x}}{8}\sin 2x.$

549. $y = \left(C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x}{2}\cos x + x\sin x\right)e^{2x}.$

550. *a)* $y = x\,(C_1\,e^{x} + C_2\,e^{-x}),$ *b)* $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{-x},$ *c)* $y = x\,(C_1\,e^{x} + C_2\,x\,e^{-x}),$

d) $y = C_1\,e^{x} + C_2\,x^3e^{-x}.$ **551.** $y_{p,n} = A_1\,e^{x} + A_2\,e^{-2}x.$ **552.** $y_{p,n} = x\,(A_1\,x + A_2) + Bx\,e^{-4x}.$

553. $y_{p,n} = A_1\,x + A_2 + B_1\cos x + B_2\sin x.$ **554.** $y_{p,n} = A_1\,e^{x} + x_2\,e^{x} + (B_1\cos x + B_2\sin x).$

555. $y_{p,n} = Ax^2 + Bx\,e^{x}.$ **556.** $y_{p,n} = A\,e^{2x} + x\,(B_1\cos 2x + B_2\sin 2x).$

557. $y_{p,n} = A_1\cos x + B_1\sin x + A_2\cos 3x + B_2\sin 3x.$ **558.** $y_{p,n} = A_1\,x + B_1\cos 8x + B_2\sin 8x.$

559. $y = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{2x} - 2x + 1 + e^{x}.$ **560.** $y = C_1 + C_2\,e^{3x} - 3x^2 - 2x + \cos x + 3\sin x.$

561. $y = 2 + e^{x}\,(C_1 + C_2\,x - \sin x).$ **562.** $y = (C_1\cos x + C_2\sin x)\,e^{-x} + x\,e^{x} + e^{-x}.$

563. $y = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)\,e^{-x} + e^{-x} - 4\cos 2x + \sin 2x.$

564. $y = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}(2x\,e^{2x} - 5).$

565. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{x}{8}\left(1 - \frac{\cos 2x}{4} - \frac{x}{2}\sin 2x\right).$

566. $y = (C_1 + C_2\,x)\,e^{-x} + C_3\cos x + C_4 - \frac{x}{8}\cos x + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} - 1\right)e^{x}.$

567. $y = C_1 + C_2\,e^{-x} + \frac{1}{2}\,e^{x} - \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{20}\sin 2x + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x.$

568. $y = C_1 + C_2\,x + C_3\,x^2 + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x + \frac{e^{x}}{5} + \frac{x^3}{24} + \frac{3x\sin 2x}{32}.$

569. $y = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)\,e^{x} + \cos x + 2\sin x + 4\cos 2x + \sin 2x.$

570. $y = C_1 + C_2\,e^{-x} + x\,e^{-x} + \frac{1}{2}\,e^{x} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x.$

571. $y = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{3x} - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{1}{4}x\,e^{-x} - \frac{1}{2}x\,e^{3x}.$

572. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x\left(\frac{1}{4}\sin 2x - \cos 2x\right) + \frac{1}{5}e^{x}.$

573. $y = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{-2x} + 3(x^2 - 2x)\,e^{-x} + 3(x^2 + 2x)\,e^{-2x}.$

574. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}\cos 4x - \frac{x}{4}\sin x + 1.$

575. $y = (C_1\cos x + C_2\sin x)\,e^{2x} + \cos x - \sin x + e^{2x} + \frac{1}{3}.$

576. $y = \left(C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\sin x\right)e^{x}.$ **577.** $y = C_1 + C_2\,e^{3x} + \frac{\cos x - 2\sin x}{5} - \frac{e^{x}}{2} - \frac{x}{3}.$

578. $y = \left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{x}{4}\sin 2x\right)e^{x} + 2x + 1.$

579. $y=(C_1+C_2\,x)\,e^x+\frac{1}{25}(4\cos x+3\sin x)+\frac{1}{8}\cos 2x+x+1.$

580. $y=(C_1+C_2\,x)\,e^{-x}+\dfrac{\cos 2x+7\sin 2x}{25}+\sin x+1.$

581. $y=\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}-\cos x+x^3-x-2.$

582. $y=(C_1+C_2x+9x^2)\,e^{-3x}+\sin x.$

583. $y=C_1+C_2\,e^{-2x}-\dfrac{\cos x}{5}+\dfrac{2\sin x}{5}-\frac{3}{8}(\cos 2x+\sin 2x)-\dfrac{x}{2}.$

584. $y=C_1+(C_2+C_3\,x)\,e^x+x^2+4x+\frac{1}{2}x^2\,e^x.$

585. $y=C_1+\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{8}\cos 3x+\frac{1}{2}x\sin x.$ 586. $y=C_1+C_2\,e^{-x}+C_3\,e^{2x}+x-x^2+\cos x.$

587. $y=C_1+C_2\,e^{2x}+C_3\,e^{-2x}+\frac{1}{5}\cos x-\dfrac{x^3}{12}-\dfrac{x}{8}+\dfrac{e^{2x}}{32}(2x^2-3x).$

588. $y=C_1\,x^3+C_2\,x^2+C_3\,x+C_4+C_5\,e^x+\dfrac{x^4}{24}+\left(\dfrac{x^2}{2}-4x\right).$

589. $y=C_1+C_2\,x+C_3\,x^2+C_4\cos x+C_5\sin x+\dfrac{x^4}{24}-e^{-x}.$ 590. $y=2-2x.$

591. $y=x^2+e^{3x}.$ 592. $y=2e^{3x}.$ 593. $y=x^2\,e^{2x}.$ 594. $y=e^{2x}-e^{3x}+x\,e^{-x}.$

595. $y=1-x\,e^{-x}.$ 596. $y=\left(x+\frac{2}{3}\right)e^{-3x}+\frac{1}{3}(4\sin x-3\cos x).$

597. $y=\cos x+x\sin x.$ 598. $y=\cos 2x+\frac{1}{3}(\sin 2x+\sin x).$ 599. $y=x\cos x+x^2\sin x.$

600. $y=(\cos x-2\sin x)\,e^{2x}+(x-1)^2\,e^x.$ 601. $y=x\,e^{3x}+x+e^{-x}.$

602. $y=2e^x+(\sin x-2\cos x)\,e^{-x}-4.$ 603. $y=-[\pi\cos x+(\pi+1-2x)\sin x]\,e^x.$

604. $y=\mathrm{sh}\,x+x^2.$ 605. $y=\cos x+2\sin x+e^{-x}+(2x-3)\,e^x.$

606. $y=2x-\dfrac{4}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x.$ 607. $y=2x\,e^x.$ 608. $y=\frac{1}{4}\cos x.$ 609. $y=\sin 2x.$

610. $y=-1.$ 611. $y=\cos x.$ 612. $y=e^{-x}.$ 613. $y=e^x+3.$ 614. $y=-\frac{1}{3}.$

615. $y=(\cos x+\sin x)\,e^x.$ 616. $y=e^{-2x}\cos 2x.$ 617. $y=(x^2+x)\,e^{-x}.$

618. $y=C_1\,x+\dfrac{C_2}{x}.$ 619. $y=\dfrac{1}{x}(C_1+C_2\ln x).$

620. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left[C_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{23}}{2}\ln x\right)+C_2\sin\left(\dfrac{\sqrt{23}}{2}\ln x\right)\right].$

621. $y=C_1+C_2\ln x.$ 622. $y=C_1(x-2)+C_2(x-2)^{-3}.$

623. $y=C_1(2x+1)+C_2(2x+1)\ln(2x+1).$ 624. $y=C_1+C_2\,x^2+C_3\,x^4.$

625. $y=C_1+C_2\,x^3+C_3\ln x.$ 626. $y=C_1+C_2\,(x+1)^3+C_3\,(x+1)^{-2}.$

628. $y=C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x+\dfrac{x}{2}(7-\ln x).$ 629. $y=C_1\,x^2+\dfrac{C_2}{x}+\frac{1}{10}(\cos\ln x-3\sin\ln x).$

630. $y=\dfrac{1}{x}(C_1+C_2\,x^4+\ln x+2\ln^2 x).$ 631. $y=C_1\,x+C_2\,x^2+(x^2+2x)\ln x+1.$

632. $y=C_1\,x+\dfrac{C_2}{x}+\dfrac{x^m}{m^2-1},\ |m|\neq 1.$ 633. $y=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}+\ln^2 x-3\ln x+2x+7.$

634. $y=\dfrac{1}{x+1}\left[C_1+C_2\ln(x+1)+\ln^3(x+1)\right].$ 635. $y=(x-2)^2\left[C_1+C_2\ln(x-2)+x-\frac{3}{2}\right].$

636. $y=C_1\,(1+4x^2)+C_2\,e^{-2x}.$ 637. $y=C_1\,(2x-3)+C_2\,x^{-2}.$

638. $y=C_1\,x^3+C_2\,(x+1)-x.$ 639. $y=C_1\,x+C_2\ln x.$ 640. $y=C_1\sin x+C_2\sin^2 x.$

641. $y=C_1\cos(\sin x)+C_2\sin(\sin x).$ 642. $y=C_1\,x+C_2\sqrt{1+x^2}+1.$

643. $y=\dfrac{C_1}{x}+C_2\,x^3+x^4.$ 644. $y=C_1\,x+\left(C_2-x+\dfrac{x^2}{2}\right)e^x.$

645. $y=C_1\cos(e^{-x})+C_2\sin(e^{-x})+e^{-x}.$ 646. $y=\dfrac{C_1}{x}+C_2\,e^{1/x}-\dfrac{\ln|x|}{x}+1.$

647. $y=C_1\cos e^x+C_2\sin e^x+x.$ 648. $y=C_1(2x-1)+C_2\,x^2+x^3.$

649. $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{k}{m}x$ (x é o comprimento da parte suspensa da corrente);

$t=\sqrt{\dfrac{6}{g}}\ln\left(6+\sqrt{35}\right)$ s. $k=g,\ m=6.$

650. $\frac{d^2S}{dt^2}=1,2t,\quad S=0,2t^3-t.$ **651.** $m\frac{d^2S}{dt^2}=-km,\quad S=\frac{v_0^2}{2k}.$

652. $\frac{d^2x}{dt^2}=k^2x,\quad x=a\,e^{kt}.$ **653.** $y=(C_1-x)\cos x+(C_2+\ln|\sin x|)\sin x.$

654. $y=C_1e^x+C_2+(e^x+1)\ln(1+e^{-x}).$ **655.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{\cos 2x}{2\cos x}.$

656. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{4}{3}\cos x\sqrt{\operatorname{ctg}x}.$ **657.** $y=(C_1+C_2x)e^x-e^x\ln\sqrt{1+x^2}+e^x x\operatorname{arctg}x.$

658. $y=(C_1-x)e^{-x}\cos x+(C_2+\ln|\sin x|e^{-x}\sin x.$ **659.** $y=C_1\cos x+C_2+\sin x+\frac{\cos 2x}{\sin x}.$

660. $y=C_1e^x+C_2-\cos e^x.$ **661.** $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+1-x+x\ln|x|.$

662. $y=C_1e^{x^2}+C_2+(x^2-1)e^{x^2}.$ **663.** $y=C_1+C_2\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}(1+x\operatorname{tg}x).$

664. $y=C_1x(\ln x-1)+C_2+x(\ln^2x-2\ln x-2).$ **665.** $y=C_1\times\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x}+C_2-x^2.$

666. $y=C_1\sin x+C_2+(\ln|\sin x|-1)\sin x.$ **667.** $y=1.$ **668.** $y=\frac{1}{x}.$

669. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2x.$ **670.** $y=\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)e^x.$ **671.** $y=\frac{1-\ln x}{\sqrt{x}}.$ **672.** $y=(x-1)e^x.$

673. $y=\frac{1}{x}.$ **674.** $y=1.$ **675.** $y''-y=0.$ **676.** $(x-1)y''-xy'+y=0.$

677. $(x-1)y''-x^2y'+(x^2-x+1)y=0.$ **678.** $y'''=0.$ **679.** $xy'''-y''+xy'-y=0.$

681. $y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p_1dx}dx.$ **682.** $p_0(x)=W(x),\ p_1(x)=-W'(x),\ p_2(x)=W(y_1',y_2'),$

onde $W(x)=W(y_1,y_2)$. — determinante de Wronski. **685.** $p_1^2<4p_2.$

689. $v(x)=e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}.$ **691.** $p>0,\ q>0.$ **692.** $p=0,\ q>0.$

693. Suponhamos que $y(x)>0$ em (a, b). Visto que a solução $y(x)$ satisfaz todas as condições do teorema de Rolle, existe, pelo menos, um ponto $\xi\in(a,b)$, no qual $y'(\xi)=0$ e, por conseguinte,

$$y''(\xi)=\frac{\xi^2+4}{\xi^2+1}>0.$$

Isto é uma contradição, uma vez que no ponto $x=\xi$ a função $y(x)$ tem um máximo e, logo, $y''(\xi)<0$. Do mesmo modo se prova que nos outros pontos ξ (se tais existirem) se verifica $y(\xi)<0$. Daqui resulta que $y(x)<0$ em (a, b).

706. *a)* $\lambda=k^2,\ k=0,1,2,\ldots;$ *b)* $\lambda=4k^2,\ k=0,1,2\ldots$ **707.** Para qualquer λ.

708. *a)* Tem solução, $y=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}2\pi}$; *b)* Não tem solução.

709. 1) $\lambda-\omega^2>0,\ y=C_1\cos 2n\pi x+C_2\sin 2n\pi x$; 2) $\lambda-\omega^2=0,\ y=C=\text{const.}$; 3) $\lambda-\omega^2<0,\ y=0.$

710. $y=\sqrt{1+4x-x^2}.$ **711.** $y=\alpha\sin x.$ **712.** $y=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}1}.$ **713.** $y=-e^x\sin x.$

714. $y=e^{\alpha}.$ **715.** $y=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{\cos\alpha(\pi-x)}{\sin\alpha\pi},\ 0<\alpha<1.$ **716.** $y=1-\cos x.$

717. $\lambda=n,\ y=\cos nx,\ n=1,2,\ldots$ **718.** $\lambda=n+\frac{1}{2},\ y=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x,\ n=0,1,\ldots$

719. $y=(x-1)e^{-x}.$ **720.** $y=C\sin nx,\ n=0,1,2,\ldots,\ C$ — constante arbitrária. **721.** $y=0.$

722. $y=C(x\ln x-x+1),\ C$ — constante arbitrária. **723.** $y=0.$ **724.** $y=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3\cdot 5}-\ldots$

725. $y=1+x-x^2+\ldots$ **726.** $y=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+\ldots$ **727.** $y=x-+\frac{2x^4}{4!}+\frac{10x^7}{7!}-\ldots$

728. $y=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^5}{5!}+\ldots$ **729.** $y=1+\frac{(x-\pi^2)}{2}+\frac{(x-\pi)^3}{3\pi}+\ldots$

730. $y=\frac{1}{e}+\frac{\sin 1}{2!}(x-e)^2+\frac{\cos 1-\sin 1}{3!\,e}(x-e)^3+\ldots$ **731.** $y=\frac{\pi}{2}-\frac{x^4}{4!}+\frac{2x^6}{6!}-\ldots$

732. $y=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots;\ (=e^{x^2}).$ **733.** $y=C_1\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{2\cdot 4\ldots 2n}+\ldots\right]+$

$$+C_2\left[x-\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}+\ldots\right].$$

734. $y=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\frac{3x^6}{6!}+\frac{3\cdot 5x^8}{8!}+\ldots+\frac{(2n+1)!!\,x^{2n+4}}{(2n+4)!}+\ldots$ onde $(2n+1)!!=1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1).$

735. $y = -2 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7x^5}{60} - \dots$ 736. $y = 1 + \frac{2x^4}{4!} - \frac{2x^5}{5!} + \frac{2x^6}{6!} - \frac{2x^7}{7!} + \frac{62x^8}{8!} - \dots$

737. $y = C_1\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + \frac{13x^6}{720} + \dots\right) + C_2\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{30} + \frac{x^6}{72} + \frac{29x^7}{5040} + \dots\right).$

738. $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^4}{24} + \frac{53x^5}{120} + \frac{269x^6}{720} + \dots$

739. $y = C_1\left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \dots\right) + C_2\sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \dots\right);\ \left(y = C_1\cos\sqrt{x} + C_2\sin\sqrt{x}\right).$

740. $y = C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}x^k.$

741. $y = C_1\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{1\cdot4x^2}{3\cdot6} + \frac{1\cdot4\cdot7x^3}{3\cdot6\cdot9} + \dots\right) + C_2 x^{7/3}\left(1 + \frac{8x}{10} + \frac{8\cdot11x^2}{10\cdot13} + \frac{8\cdot11\cdot14x^3}{10\cdot13\cdot16} + \dots\right).$

742. $y = C_0 x^{m/2}\left\{1 - \frac{\alpha x}{m+1} + \left[\frac{\alpha^2}{2(m+1)(m+2)} - \frac{E}{4(m+2)}\right]x^2 + \dots\right\},$

onde C_0 é uma constante arbitrária, $\rho = \frac{m}{2}$.

743. $y = C_0\,x\left\{1 + \frac{2-\alpha}{6}x^2 + \left[\frac{(2-\alpha)(12-\alpha)}{120} - \frac{\beta}{20}\right]x^4 + \dots\right\}$, onde C_0 é uma constante arbitrária, $\rho = 1$.

744. $y = C_1 J_{1/3}(2x) + C_2 J_{-1/3}(2x).$ 745. $y = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x).$

746. $y = C_1 J_0\left(\frac{x}{3}\right) + C_2 Y_0\left(\frac{x}{3}\right).$ 747. $y = C_1 J_0(2x) + C_2 Y_0(2x).$

748. $y = x^{3/2}\left[C_1 J_{5/4}(x^2) + C_2 J_{-5/4}(x^2)\right].$ 749. $y = \sqrt[4]{x}\left[C_1 J_{1/2}(\sqrt{x}) + C_2 J_{-1/2}(\sqrt{x})\right].$

750. $y = \frac{1}{x^2}\left[C_1 J_2(x) + C_2 Y_2(x)\right].$ 751. $y = \frac{1}{x}\left[C_1 J_1(2x) + C_2 Y_1(2x)\right].$

752. $y = \frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx + \sin nx}{n^3(n^2-3)}.$ 753. Não tem soluções periódicas.

754. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2(n^2-1)}.$ 755. Não tem soluções periódicas.

756. $y = C - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx + n\sin nx}{n^3(n^2+1)}.$ 757. Não tem soluções periódicas.

758. $y = \frac{\pi^2}{6} + 4 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n^2-4)\cos nx + 4n\sin nx}{n^2(n^2+4)^2}.$

759. $y = -\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n\pi x}{(n^2\pi^2+1)(4n^2-1)}.$

760. $y = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4n\cos nx + (4-n^2)\sin nx}{(2n-1)^2(n^2+4)^2}.$ 761. Não tem soluções periódicas.

764. $f(x) \sim \frac{1}{x}.$ 767. Sim. 768. Sim. 769. Não. 770. Não. 771. Sim.

772. Não. 773. *a*) Sim; *b*) Não. 774. Sim. 775. Não.

776. $\begin{cases} x = 3C_1\cos 3t - 3C_2\sin 3t, \\ y = C_2\cos 3t + C_1\sin 3t. \end{cases}$ 777. $\begin{cases} x = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} + t - 1, \\ y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} - t + 1. \end{cases}$

778. $\begin{cases} x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, \\ y = e^{-t} + 3e^{-7t}. \end{cases}$ 779. $\begin{cases} x = (\sin t - 2\cos t)\,e^{-t}, \\ y = e^{-t}\cos t. \end{cases}$

780. $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}, \\ y = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{-3t} + \cos t. \end{cases}$ 781. $\begin{cases} x = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t, \\ y = C_1\sin t - C_2\cos t + C_3 e^{t}, \\ z = C_1\cos t + C_2\sin t + C_3 e^{t}. \end{cases}$

782. $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \\ z = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t}. \end{cases}$ 783. $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + C_3\sin t + C_4\cos t, \\ y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} - C_3\sin t - C_4\cos t. \end{cases}$

784. $\begin{cases} x = C_1 + C_2 t + C_3 t^2, \\ y = -(C_1 + 2C_3)t - \dfrac{C_2}{2} t^2 - C_3 \dfrac{t^3}{3} + C_4. \end{cases}$

785. $\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^t + C_3 e^{-2t}, \\ y = 2(C_2 - C_1 - C_2 t) e^t + C_3 e^{-2t}. \end{cases}$

786. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^t - e^{2t}. \end{cases}$

787. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + t = C_1, \\ \dfrac{1}{x-y} + t = C_2. \end{cases}$

788. $\begin{cases} x = C_2 e^{-t/C_1}, \\ y = \dfrac{C_1}{C_2} e^{t/C_1}. \end{cases}$

789. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = C_1, \\ 1 + C_1 x = C_2 e^{C_1 t}. \end{cases}$

790. $\begin{cases} x^3 - y^3 = C_1, \\ x - y + t = C_2. \end{cases}$

791. $\begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{x+y}{2} = C_1 e^t, \\ \operatorname{tg} \dfrac{x-y}{2} = C_2 e^t. \end{cases}$

792. $\begin{cases} y = C_1 x, \\ C_1 x^2 = C_2 - 2e^{-t}. \end{cases}$

793. $\begin{cases} \operatorname{tg}(x+y) = t, \\ \operatorname{tg}(x-y) = t. \end{cases}$

794. $\begin{cases} y = C_1 t, \\ y = C_2 e^t. \end{cases}$

795. $\begin{cases} t^2 - x^2 = C_1, \\ x^2 - y^2 = C_2. \end{cases}$

796. $\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1^2, \\ p^2 + q^2 = C_2^2, \\ xp + yq = C_3. \end{cases}$

797. $\begin{cases} xy = C_1, \\ \ln x = C_2 + \dfrac{t^2}{2C_1}. \end{cases}$

798. $\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1 x - t^2, \\ y = C_2 x. \end{cases}$

799. $\begin{cases} 2x + 3y + 4t = C_1, \\ x^2 + y^2 + t^2 = C_2. \end{cases}$

800. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{3} + \dfrac{C_2}{t^2}, \\ y = C_1 e^t - \dfrac{t}{3} - \dfrac{C_2}{t^2}. \end{cases}$

801. $\begin{cases} x^2 + y^2 + t^2 = C_1, \\ x^2 - 2xy - y^2 = C_2. \end{cases}$

802. $\begin{cases} x = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}, \\ y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}. \end{cases}$

803. $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{2t}, \\ y = C_1 - C_2 e^{2t}. \end{cases}$

804. $\begin{cases} x = O, \\ y = O. \end{cases}$

805. $\begin{cases} x = e^{2t} - e^{3t}, \\ y = e^{2t} - 2e^{3t}. \end{cases}$

806. $\begin{cases} x = -5e^{2t} \sin t, \\ y = e^{2t}(\cos t - 2\sin t). \end{cases}$

807. $\begin{cases} x = \frac{1}{3} C_1 e^t - C_2 e^{-2t}, \\ y = \frac{1}{3} C_1 e^t + 2C_2 e^{-2t}, \\ z = \frac{1}{3} C_1 e^t - C_2 e^{-2t}. \end{cases}$

808. $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t}, \\ y = C_1 e^{2t} - C_3 e^t, \\ z = C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} - C_3 e^t. \end{cases}$

809. $\begin{cases} x = 1 - e^{-t}, \\ y = 1 - e^{-t}, \\ z = 2e^{-t} - 1. \end{cases}$

810. $\begin{cases} x = 2e^{2t} + C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ y = 9e^{2t} + 3C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \end{cases}$

811. $\begin{cases} x = (1-t)\cos t - \sin t, \\ y = (t-2)\cos t + t\sin t. \end{cases}$

812. $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2. \end{cases}$

813. $\begin{cases} x = C_1 + 2C_2 e^{-t} + 2e^{-t} \ln\left|e^{-t} - 1\right|, \\ y = -2C_1 - 3C_2 e^{-t} - 3e^{-t} \ln\left|e^{-t} - 1\right|. \end{cases}$

814. $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \cos t \ln\left|\cos t\right| + t \sin t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \sin t \ln\left|\cos t\right| + t \cos t. \end{cases}$

815. $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{cases}$

816. $\begin{cases} x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + t, \\ y = C_1 \sin 2t - C_2 \cos 2t + 1. \end{cases}$

817. $\begin{cases} x = -C_1 \sin t + (C_2 - 1)\cos t, \\ y = C_1 \cos t + C_2 \sin t. \end{cases}$

818. $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 + e^t, \\ y = C_1 e^{2t} - C_2 - e^t. \end{cases}$

819. $\begin{cases} x = -t, \\ y = 0. \end{cases}$

820. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^t. \end{cases}$

821. $\begin{cases} x = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + t, \\ y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t^2 - 2. \end{cases}$

822. $\begin{cases} x = -C_1 t + C_2 - 2e^{-t} - \cos t - \sin t, \\ y = C_1 - 2e^{-t} + \cos t. \end{cases}$

823. $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 \sin t + C_3 \cos t, \\ y = -C_1 e^t + C_2 \cos t - C_3 \sin t + t, \\ z = C_2 \sin t + C_3 \cos t + 1. \end{cases}$

824. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{-t}, \\ z = 1. \end{cases}$

825. $\begin{cases} x = 4C_1 e^{6t} - C_2 e^t, \\ y = C_1 e^{6t} + C_2 e^t. \end{cases}$

826. $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{7t}, \\ y = -4C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{7t}. \end{cases}$

827. $\begin{cases} x = 4C_1 e^t + C_2 e^{6t} - \frac{4}{6}, \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{6t} - \frac{1}{6}. \end{cases}$

828. $\begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t} - e^t, \\ y = C_1 e^{4t} - C_2 e^{2t} + e^t. \end{cases}$

829. $\begin{cases} x = C_1(1+2t) - 2C_2 - 2\cos t - 3\sin t, \\ y = -C_1 t + C_2 + 2\sin t. \end{cases}$

830. $x = e^{-2t} - e^{-3t}.$

831. $x = -(t^3 + 2t^2 + 2t + 1)$. **832.** $x = \sin t$. **833.** $x = \dfrac{t^2 - 2}{4} e^{-3t}$.

834. $x = e^{-t} + \sin t - \cos t$. **835.** $x = 0$. **836.** $x = \frac{1}{2} t^2$. **837.** $x = 1 - \cos t$.

838. $x = 0$. **839.** $x = e^{-t}$. **840.** $x = -1 - t$. **841.** $x = t$. **842.** $x = t^2$.

843. $x = 1$. **844.** $x = 1 - 4t e^{-2t}$. **845.** $x = \dfrac{t^2 + 2}{4} e^{t}$. **846.** $x = (t+1)\sin t - \cos t$.

847. $x = t^2 - 3t + 4$. **848.** $x = e^{t} + \sin t$. **849.** $x = \left(\dfrac{t^3}{6} - \dfrac{t^2}{2} + t\right) e^{2t}$.

850. $x = \left(\dfrac{t^2}{8} + t - 2\right) e^{t/2}$. **851.** $x = (1+t)e^{-t} + (1-t)e^{-2t}$.

852. $x = \dfrac{t}{5}(6e^{3t} - 2e^{-2t})$. **853.** $x = \dfrac{t^4}{12} e^{-2t}$. **854.** $x = e^{t} + \cos t - \sin t$.

855. $x = 3(1+t)\sin 3t$. **856.** $x = t\left(\sin 2t + \frac{1}{8}\cos 2t\right)$. **857.** $x = \frac{1}{4}(t-1)(\cos t + \sin t)$.

858. $x = e^{2t}[(1-t)\cos t + (1+t)\sin t]$. **859.** $x = t - 1 + 2e^{t}$. **860.** $x = -t/4$.

861. $x = t e^{t}$. **862.** $x = 4t(\sin t - \cos t)$. **863.** $x = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t + t \sin 2t)$.

864. $\begin{cases} x = e^{t} + e^{-t}, \\ y = -e^{t} + e^{-t}. \end{cases}$ **865.** $\begin{cases} x = 4e^{-2t} - 3e^{-3t}, \\ y = 3e^{-3t} - 2e^{-2t}. \end{cases}$ **866.** $\begin{cases} x = e^{t}(\cos t - 2\sin t), \\ y = e^{t}(3\sin t + \cos t). \end{cases}$

867. $\begin{cases} x = -\frac{3}{4} + \frac{13}{4}\cos 2t - 3\sin 2t, \\ y = \frac{3}{2}t + 3\cos 2t + \frac{13}{4}\sin 2t. \end{cases}$ **868.** $\begin{cases} x = e^{t}, \\ y = e^{t}. \end{cases}$ **869.** $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sin t + \cos t), \\ y = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t). \end{cases}$

870. $\begin{cases} x = 2 - e^{t}, \\ y = -2 + 4e^{t} - t e^{t}, \\ z = -2 + 5e^{t} - t e^{t}. \end{cases}$ **871.** $\begin{cases} x = 1 + 3e^{2t} + e^{-2t}, \\ y = e^{2t} - e^{-2t}, \\ z = 2e^{2t} + 2e^{-2t}. \end{cases}$ **872.** $\begin{cases} x = 3 - 2e^{-t}, \\ y = e^{-t}, \\ z = e^{-t} - 3. \end{cases}$

873. $\begin{cases} x = 2(1 - e^{-t} - t e^{-t}), \\ y = 2 - t - 2e^{-t} - 2t e^{-t}. \end{cases}$ **874.** $\begin{cases} x = e^{t} + \sin t, \\ y = e^{t} - \sin t. \end{cases}$ **875.** $\begin{cases} x = \cos t + e^{-\sqrt{3}t}, \\ y = \frac{1}{2}\left(\cos t - e^{-\sqrt{3}t}\right). \end{cases}$

876. $\begin{cases} x = t - \dfrac{t^3}{6} + e^{t}, \\ y = 1 + \frac{1}{24}t^4 - e^{t}. \end{cases}$ **877.** $\begin{cases} x = 12(\operatorname{ch} t - 1) - \frac{7}{2} t \cdot \operatorname{sh} t, \\ y = 7t \cdot \operatorname{sh} t - 17(\operatorname{ch} t - 1). \end{cases}$

878. $\begin{cases} x = t^2 + t, \\ y = -\frac{1}{2}t^2. \end{cases}$ **879.** $\begin{cases} x = e^{t}(2\cos t - \sin t), \\ y = e^{t}(3\cos t + \sin t). \end{cases}$

880. Instável. **881.** Instável. **882.** Assimptoticamente estável. **883.** Estável.

884. Estável. **885.** Estável. **886.** Foco instável. **887.** Ponto de sela.

888. Centro. **889.** Foco estável. **890.** Nó estável. **891.** Nó instável.

892. Nó instável. **893.** $\alpha < -1/2$. **894.** *a*) O ponto de equilíbrio é assimptoticamente estável. *b*) O ponto de equilíbrio é instável. *c*) O ponto de equilíbrio é assimptoticamente estável.

895. $V = 2x^2 + 3y^2$; assimptoticamente estável. **896.** $V = x^4 + y^4$; estável.

897. $V = x^2 - 1/2\, y^2$; instável. **898.** $V = x^2 + y^2$; assimptoticamente estável.

899. $V = x^2 + y^2$; instável. **900.** $V = 2x^2 + y^2$; estável.

901. $V = x^2 + y^2$; assimptoticamente estável. **902.** $V = x^2 - y^2$; instável.

903. $V = x^2 + 1/2\, y^2$; estável. **904.** $V = x^2 + 3y^2$; assimptoticamente estável.

905. $V = x^4 - y^4$; instável. **906.** $V = x^4 + 2y^2$; estável. **907.** $V = x^2 - y^2$; instável.

908. $V = 3x^2 + 2y^2$; estável.

909. Pelas condições que são impostas à função $v(x_1, \ldots, x_n)$, torna-se evidente que o sistema dado admite a solução trivial $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$. Tomando v como função de Liapunov, a derivada dv/dt, determinada de acordo com o sistema, tem a forma

$$\frac{dv}{dt} = -\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial v}{\partial x_n}\right)^2\right] \ldots \qquad (1)$$

Por conseguinte, a solução trivial $x = 0$ do sistema dado é estável segundo Liapunov quando $t \to +\infty$. A estabilidade será assimptótica se dv/dt for uma função definida negativa.

910. Instável. **911.** Estável. **912.** Estável. **913.** Estável. **914.** Estável.

915. Instável. **916.** Estável. **917.** Instável. **918.** Estável. **919.** Estável.

920. Instável. **921.** Não é possível investigar a estabilidade segundo a primeira aproximação, uma vez que as raízes da equação característica são imaginárias puras. No entanto, a função $V = 3x^2 + 4y^2$ satisfaz todas as condições do teorema de Liapunov sobre a estabilidade assimptótica, em particular, $dV/dt = -(6x^4 + 8y^4) \leq 0$. Por conseguinte, o ponto de equilíbrio $x = 0$, $y = 0$ é assimptoticamente estável. **922.** $V = x^2 + y^2$; a solução $x = 0$, $y = 0$ é assimptoticamente estável. **923.** $\Delta < 0{,}017$. **924.** $\Delta < 0{,}16$. **925.** $\Delta < 0{,}0012$.

926. Instável. **927.** Estável. **928.** Estável. **929.** Instável. **930.** Estável.

931. Instável. **932.** Estável. **933.** Estável. **934.** Estável **935.** Instável.

936. Estável. **937.** $\alpha > 3/2$. **938.** Sempre instável. **939.** $\alpha > 5/2$.

940. $\alpha > 0$, $\alpha\beta > 1 + \alpha^2$. **941.** $\alpha > 2/3$, $\beta > 0$, $9\beta - 6\alpha + 4 < 0$. **942.** Estável.

943. Estável. **944.** Estável. **945.** Estável. **946.** Estável. **947.** Estável.

948. Estável. **949.** Instável. **950.** Instável. **951.** Instável. **952.** Instável.

953. Estável. **954.** Instável. **955.** Estável. **956.** Estável. **957.** Instável.

958. Instável. **959.** Instável. **960.** Instável. **961.** $x = 0$ é instável, $x = t^4 + 1$ é estável.

962. $x = t$ é estável, $x = e^t$ é instável. **963.** $x = t$, quando $t < 0$, e $x = -t$, quando $t > 0$, são estáveis.

964. $x = 0$, quando $t < 0$, é estável. **965.** $x = t$ é estável, $x = e^{t^2+1}$ é instável. **966.** Instável.

967. Instável.

Apêndice 1

ALGUMAS FÓRMULAS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Em coordenadas cartesianas (Fig. 65):

$$y' = \operatorname{tg} \alpha$$

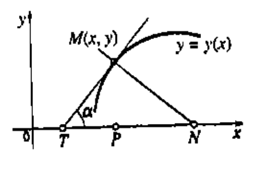


Fig. 65

1. Subtangente: $TP = \dfrac{y}{y'}$.
2. Subnormal: $PN = yy'$.
3. Comprimento do segmento da tangente: $TM = \left|\dfrac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}\right|$.
4. Comprimento do segmento da normal: $MN = \left|y\sqrt{1 + y'^2}\right|$.
5. Diferencial do comprimento de arco da curva: $dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Em coordenadas polares (Fig. 66):

$$\rho = \rho(\varphi),\ \rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$$

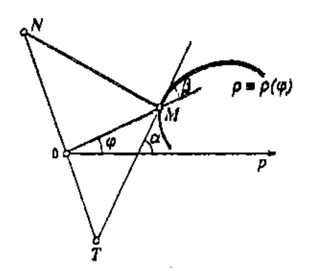


Fig. 66

6. Ângulo β entre a tangente e o raio-vector: $\operatorname{tg}\beta = \frac{\rho}{\rho'}$.

7. Subtangente polar: $T0 = \frac{\rho^2}{\rho'}$.

8. Subnormal polar: $0N = \rho'$.

9. Comprimento do segmento da tangente: $TM = \left|\frac{\rho}{\rho'}\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\right|$.

10. Comprimento do segmento da normal: $MN = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$.

11. Diferencial do comprimento do arco de curva: $dS = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi$.

Apêndice 2

TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE ALGUMAS FUNÇÕES FUNDAMENTAIS

N.º	Original $f(t)$	Transformada $F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t^n $(n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	t^α $(\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
4	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
7	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
8	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
9	$\sin(t-\alpha)$ $(\alpha > 0)$	$\frac{1}{p^2+1} e^{-\alpha p}$
10	$\cos(t-\alpha)$ $(\alpha > 0)$	$\frac{p}{p^2+1} e^{-\alpha p}$

Continua na próxima página

Continuação da tabela

N.º	Original f(t)	Transformada $F(p)=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt$
11	$t^n e^{\lambda t}$, $n=1,2,\ldots$	$\dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
12	$t^{\alpha} e^{\lambda t}$ $(\alpha>-1)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$
13	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
14	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
15	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
17	$J_n(t)$, $n=1,2,\ldots$	$\dfrac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
18	$s_i(t)$ (*)	$\dfrac{\operatorname{arcctg} p}{p}$
19	$\operatorname{Er} f\left(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$ $(\alpha>0)$	$\dfrac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}$
20	$\ln t$	$\dfrac{1}{p}\left(\ln\dfrac{1}{p}-c\right)$, $c=0{,}57722$ — constante de Euler

(*) N. do T.: Por definição $S_i(t)=\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Bibliografia

1. E. L. Ains. **Equações Diferenciais Ordinárias, GITTL, 1939.**
2. I. G. Aramanovitch, G.L.Lunts, L. E. Elsgolts. **Funções de Variável Complexa. Cálculo Operacional.** Teoria da Estabilidade. Moscovo, 1968.
3. G. N. Berman. Problemas de Análise Matemática. Moscovo, 1958.
4. F. S. Gudymenko, I. A. Pavliuk, V. A. Volkov. Problemas de Equações Diferenciais. Kiev, 1972.
5. N. M. Gunter, R. O. Kuzmin. Problemas de Matemáticas Superiores, T. II. 1958.
6. Demidovitch B. P. Lições de Teoria Matemática da Estabilidade. Moscovo, 1967.
7. E. A. Koddington, N. Levinson. Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias. Moscovo,1958.
8. L. I. Kreiev. **Problemas de Equações Diferenciais. Moscovo, 1940.**
9. N. M. Matveiev. **Métodos de Integração de Equações Diferenciais Ordinárias. Moscovo, 1974.**
10. N. M. Matveiev. Problemas e Exercícios de Equações Diferenciais Ordinárias. Moscovo, 1970.
11. S. M. Nikolski. Curso de Análise Matemática, T. I-II. Moscovo, 1973.
12. I. G. Petrovski. Lições de Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias. Moscovo, 1964.
13. L. S. Pontriáguine. Equações Diferenciais Ordinárias. Moscovo, 1961.
14. J. Sansone. Equações Diferenciais Ordinárias, T. I-II. Moscovo, 1953.
15. V. V. Stepanov. Curso de Equações Diferenciais. Moscovo, 1950.
16. F. Tricomi. Equações Diferenciais. Moscovo, 1962.
17. A. F. Filippov. Problemas de Equações Diferenciais. Moscovo, 1973.
18. G. Philips. Equações Diferenciais. Moscovo-Leninegrado, 1950.
19. L. E. Elsgolts. Equações Diferenciais e Cálulo de Variações. Moscovo, 1965.

Índice

A

C

D

E

F